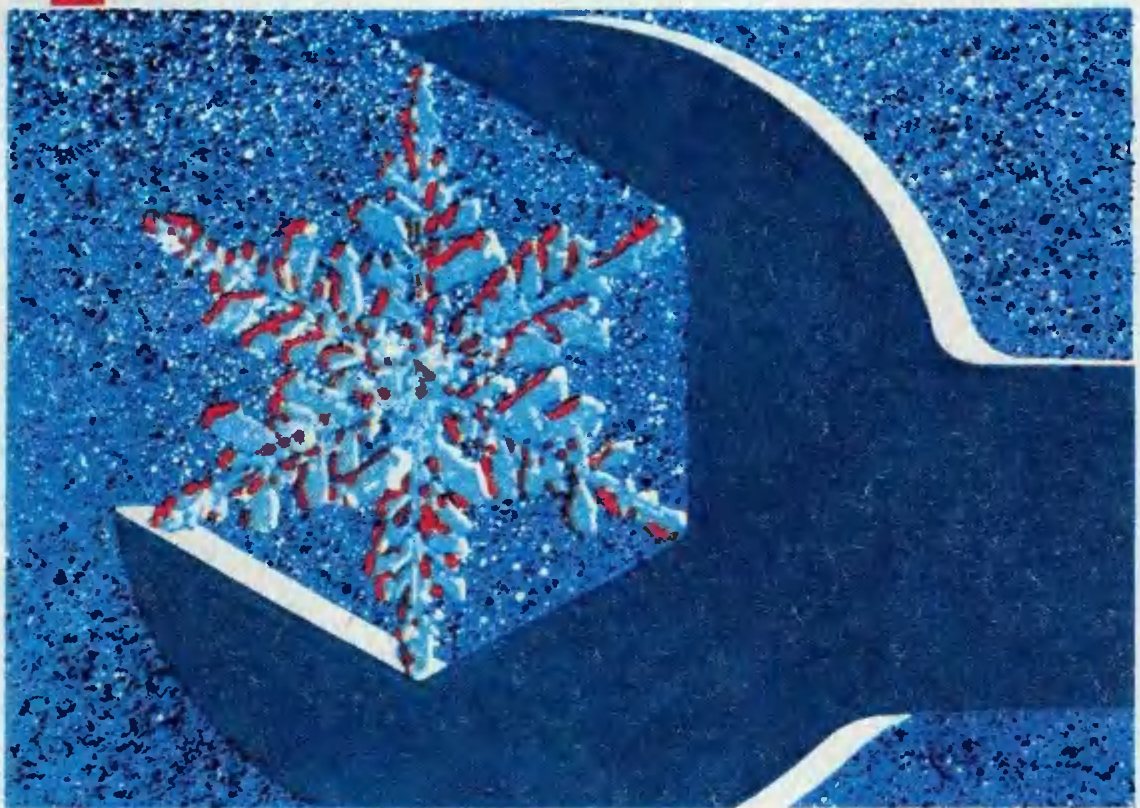
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Лед — икс

1989


VAN DARGENT

Квант

Основан в 1970 году

1 1989

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Дорогие читатели!

Поздравляем вас с наступившим Новым годом! Для журнала «Квант» это двадцатый год его существования. Многие из тех, кто еще школьником регулярно читал наш журнал и размышлял над его статьями и задачами, теперь научные работники, педагоги, инженеры. Мы надеемся, что и новые наши подписчики найдут для себя в журнале много интересного и полезного.

Каждый номер журнала содержит широкий спектр материалов. Это рассказы о достижениях науки и ее применениях, об истории физики и математики и о новых открытиях. Мы знакомим читателей с крупными отечественными и зарубежными учеными, их взглядами и путями в науку.

Журнал насыщен разнообразными задачами, которые необходимы для тренировки пытливого ума. Это занимательные задачи для начинающих («младших школьников»), более серьезные избранные школьные задачи, экзаменационные задачи для абитуриентов, требующие еще более длительных раздумий олимпиадные и исследовательские задачи, циклы задач для математического кружка. Особая роль отведена разделу «Задачник «Кванта», который проводит традиционные ежегодные конкурсы на лучшее решение задач из этого раздела. Надо сказать, что бóльшая часть материалов нашего журнала рассчитана на серьезное чтение «с карандашом в руке».

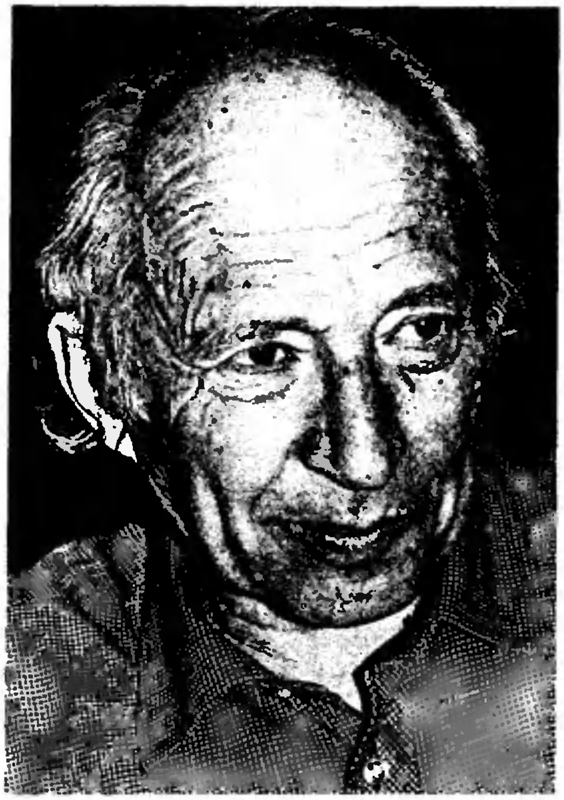
В журнале найдут пищу для размышлений не только «теоретики», но и «экспериментаторы» — те, кто любят физические опыты.

Регулярно появляются в журнале материалы, рассказывающие о различных олимпиадах и конкурсах, о заочных и вечерних физико-математических школах, о новых книгах по математике и физике.

В этом году объем нашего журнала увеличился на 16 страниц. Мы хотели бы использовать эту возможность для более полного удовлетворения пожеланий наших читателей. Так, интересующимся компьютерами и программами будут адресованы статьи о математических вопросах программирования, об использовании ЭВМ в науке и в жизни. Большее внимание будет уделено различным направлениям и достижениям в освоении космического пространства. В частности, мы будем давать регулярную информацию о работе недавно созданного при ЦК ВЛКСМ Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества. На страницах «Кванта» найдут место и произведения художественной литературы, прежде всего — научная фантастика.

Нам очень хотелось бы, чтобы «Квант» стал вашим другом, помощником, учителем, собеседником. А это невозможно без вашего непосредственного участия, без тесной «обратной связи». Мы ждем ваших писем!

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ И. М. ГЕЛЬФАНДОМ



Израиль Моисеевич Гельфанд — один из крупнейших современных математиков. Он автор около 500 работ, среди которых — статьи и книги не только собственно по математике, но и по физике, биологии, физиологии, медицине и математическим методам сейсмологии. И. М. Гельфанд — член Лондонского королевского общества (Англия), Французской академии наук, Национальной академии наук США, Шведского королевского общества, Ирландского королевского общества и других иностранных академий, Почетный доктор (Honoris Causa) Оксфордского, Парижского, Гарвардского и других университетов, лауреат Ленинской, Государственных и многих международных премий.

Всеобщей известностью пользуется математический семинар Гельфанда, который уже 45 лет собирается в понедельник вечером в Московском университете. На семинаре учатся и студенты-первокурсники, и известные ученые. Несколько поколений выдающихся математиков воспитано этим семинаром.

Израиль Моисеевич — основатель Всесоюзной заочной математической школы и председатель ее Научного совета. Главная задача этой школы — помочь тем школьникам, которые, в отличие от жителей Москвы, Ленинграда и других крупных городов, практически лишены математической литературы и контактов с учеными. Созданная 25 лет назад, Всесоюзная заочная математическая школа была первой в нашей стране школой такого типа; впоследствии по ее образцу были открыты и другие заочные школы.

Беседа с академиком Гельфандом планировалась как обычное интервью «Кванту». Мы заготовили вопросы, интересные, как нам казалось, и нашим читателям, и нашему собеседнику. Израиль Моисеевич, просмотрев список вопросов, отметил, что вопросы очень интересные, но он себя... не считает компетентным отвечать на них.

— Вы понимаете, я не считаю себя вправе навязывать свое мнение вашим молодым читателям. Давайте лучше я расскажу, как занимался математикой в том возрасте, который совпадает с возрастом большей части читателей «Кванта» — от 13 до 17 лет. Не уверен, что помню сейчас все задачи, которыми я занимался в это время, но те задачи, о которых расскажу, я запомнил очень хорошо. Вот рассказ И. М. Гельфанда.

Один из романов Грэхема Грина называется «The loser takes all»*). Моя математическая биография складывалась удивительно счастливо, и много лет она была осуществлением этого высказывания. В чем мне повезло? Если коротко, то, во-первых, в том, что я не учился в университете (да и вообще ни в каком высшем учебном заведении), а, во-вторых, в том, что в результате определенных жизненных трудностей, постигших мою семью, я оказался в Москве без родителей, безработным, в шестнадцать с половиной лет.

И. М. Гельфанд беседует с выдающимся французским математиком Ж.-П. Серром после его выступления на семинаре Гельфанда в МГУ. Апрель 1984 года.

Попробую пояснить смысл фразы «the loser takes all» с помощью рассказа другого английского писателя, Сомерсета Моэма. Главный герой рассказа, некий церковный служка, терпит неудачу: при аттестации церковного персонала выясняется, что он неграмотен, и его выгоняют с работы. Он начинает работать продавцом сигарет, затем выкупает табачный киоск, потом несколько других киосков ... и делает блистательную коммерческую карьеру, становится самым богатым человеком своего города, его мэром. И вот у него берут интервью — как вы сейчас у меня — и он поясняет журналисту, что неграмотен. Потрясенный журналист восклицает: «А каких бы Вы высот достигли, если бы были грамотным!» Немедленно следует ответ: «Я был бы церковным служкой.»

Так вот я в феврале 1930 года, в 16 с половиной лет, приехав в Москву к дальним родственникам, был часто безработным, брался за любую временную работу, а больше сидел в Ленинской библиотеке и «добирал» те знания, которые недополучил в школе и в незаконченном профессионально-техническом училище. В библиотеке я познакомился со студентами университета и стал ходить на семинары. В 18 лет я уже преподавал, а в 19 попал в аспирантуру, и моя дальнейшая математическая биография шла обычным, регулярным образом, тут она вписывается в русло, привычное для математиков.

Но не об этой части моей жизни я хотел рассказать читателям «Кванта», а о предыдущей — о том, как я занимался математикой в возрасте от 13 до 17 лет. Я хочу об этом рассказать по двум причинам. Во-первых, по моему глубокому убеждению, у большинства будущих профессиональных математиков математическая одаренность проявляется именно в период от 13 до 16 лет**), хотя, конечно, бывают и флуктуации, от более раннего развития до значительно более позднего (от 20 до 30 и даже 40 лет), которое наблюдалось у некоторых очень сильных математиков. Во-вторых, этот период сформиро-

*) Проигравший получает все (англ.)

**) Более подробно об этом Израиль Моисеевич рассказал в интервью, опубликованном в «Известиях» 3 декабря 1987 года.

вал мой способ занятия математикой. Предмет исследований, конечно, варьировался, но художественный образ математики, сложившийся в это время, явился основой вкуса в выборе задач, привлекающих меня вплоть до сегодняшнего дня. Мне кажется, что без понимания этой мотивировки нельзя разобраться в кажущейся алогичности моих способов заниматься и выбора тем занятий. В свете же этой мотивировки они на самом деле сложились очень последовательно и логично.

Семинар Гельфанда. За первым столом второй слева — гость семинара известный американский математик Р. Макферсон. 1981 год.

Первое, что я помню, относится к 5—6 классу. Я тогда понял, что есть задачи по геометрии, которые нельзя решить алгебраически. Я составил таблицу отношений длины хорды к длине дуги через каждые 5°. Лишь много позже я узнал, что бывают тригонометрические (не алгебраические!) функции и что в сущности я составлял тогда тригонометрические таблицы.

Примерно в то же время я проработал задачник по элементарной алгебре. Курса алгебры у меня не было, теории я не знал, а приходилось решать порой непростые задачи, используя, например, (неизвестные мне) формулы сокращенного умножения. Если я не мог расшифровать, как решить данную задачу, я заглядывал в ответ, научился по постановкам задач и ответам восстанавливать методы их решения. В частности, я тогда понял и запомнил на всю жизнь, что новой областью можно овладеть, решая задачи, и никогда не зазорно посмотреть в ответ, поскольку когда мы решаем какую-либо проблему, всегда имеется гипотеза об ответе. Занятия математикой вообще похожи на решения задач, в которых кое-что известно об ответе. Этим математическая работа отличается от необходимой, конечно, тренировки по выполнению конкурсной работы для поступления в вуз.

В начале 6-го класса я обратил внимание на задачи по геометрии, в которых часто появлялся прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5, и даже со сторонами 5, 12, 13. Мне захотелось найти все прямоугольные треугольники с целыми сторонами, и я вывел общую формулу для их сторон, т. е. нашел все Пифагоровы тройки. (Разумеется, я тогда не знал этого термина.) К сожалению, сейчас не помню, как я это сделал.

Занимался математикой я во время болезней и в каникулы. Я и теперь замечаю, как много успевают сделать сильные школьники, когда по болезни остаются дома. Своих сыновей я поэтому после болезней на несколько лишних дней оставлял дома.

Геометрию мы проходили по Киселеву, еще не испорченному последующими переработками. Некоторые теоремы давались в виде задач. Я достал общую тетрадь (в те годы это было не так-то легко), выписал на каждой странице условие теоремы и за лето заполнил доказательствами почти все страницы. Так я научился писать математические работы.

Я пропущу большой период. Отмечу только книгу по алгебре Давыдова с остроумными способами решения задач на максимум и минимум элементарными методами (т. е. без применения дифференциального исчисления). Например, найти максимум ab, если $a+b$ задано; найти прямоугольник максимальной площади при заданном периметре; найти максимум произведения неотрицательных чисел $a_1a_2...a_n$, если задана их сумма $a_1+a_2+...+a_n$; из квадрата с заданной стороной вырезают квадратики, а из оставшейся части делают коробку; какого размера квадратики надо вырезать, чтобы объем коробки был максимален?

Большое впечатление произвели на меня комбинаторика и бином Ньютона, который я долго продумывал.

Жил я в маленьком городишке с единственной школой. Моим преподавателем математики был очень добрый, хотя с виду и суровый человек по фамилии Титаренко. У него были большие запорожские усы. Лучшего учителя я не встречал, хотя я знал больше него, и он это понимал. Он очень любил и всячески ободрял меня. Ободрять — самое главное для учителя, не так ли?

Существенной была нехватка книг по математике. Я видел в объявлениях, что есть книги по высшей математике, и представлял высшую математику как нечто очень интересное. Родители мои не могли выписать эти книги — не было денег. Но тут мне опять повезло. В 15 лет меня повезли в Одессу оперировать аппендицит. Я заявил родителям, что не лягу в больницу, пока мне не купят книгу по высшей математике. Родители согласились и купили курс высшей математики Беляева для вузов на украинском языке. Денег, впрочем, хватило лишь на первую часть, с изложением дифференциального исчисления и аналитической геометрии на плоскости.

Мне повезло, что я начинал не с глубокого университетского курса. Это была очень элементарная книга. Об уровне книги Беляева можно судить по введению к ней. В нем, в частности, говорилось, что функции бывают трех видов: аналитические, заданные формулами; эмпирические, заданные таблицами; корреляционные. Что такое корреляционные функции — я узнал много лет спустя у студента, занимавшегося теорией вероятности.

На третий день после операции я взялся за эту книгу и читал ее, перемежая это с чтением романов Э. Золя, дней девять (тогда после подобных операций лежали 12 дней). За это время я ее прочитал.

Из книги я усвоил две замечательные идеи. Во-первых, любая геометрическая задача на плоскости и в пространстве может быть записана формулами. Впрочем, я подозревал это и раньше. Я также узнал о существовании таких замечательных фигур, как, например, эллипс.

Вторая идея — она произвела переворот в моем мировоззрении — заключалась в том, что есть формула для вычисления синуса: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

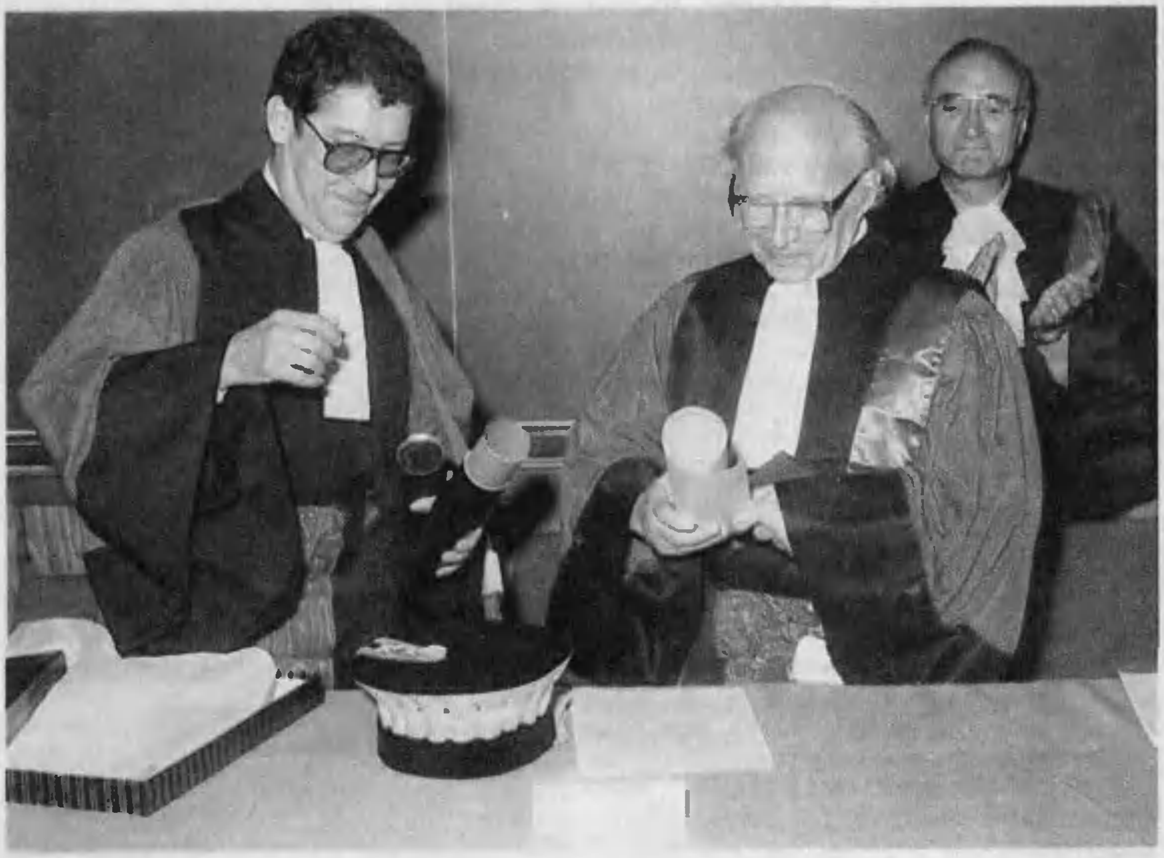
До этого я считал, что есть две математики — алгебраическая и геометрическая, и что геометрическая математика принципиально «трансцендентна» для алгебраической. Возьмите, например, формулу длины окружности — там есть «геометрическое» число π. Или, скажем, синус — он определяется чисто геометрически.

Когда я обнаружил, что синус можно записать алгебраически в виде ряда, барьер обрушился, математика стала единой. И по сей день я воспринимаю различные разделы математики вместе с математической физикой как единое целое.

Конечно, я убедился в том, что задачи на экстремум решаются автоматически, и хотя они теряют свое обаяние, у вас в руках мощный аппарат для их решения.

Изучая дифференциальное исчисление, я узнал, что бывает еще и интегральное исчисление, связанное с площадями и объемами. Но в чем оно состояло, мне не было известно: ведь у меня не было второго тома курса Беляева!

Тут я хочу вспомнить еще одну задачу. Когда мы следующей осенью проходили в школе объемы тел вращения, мой одноклассник, известный впоследствии математик Д. П. Мильман, обратил мое внимание на следующую задачу: найти объем тела, образованного вращением круга вокруг своей касатель-



Вручение И. М. Гельфанду почетной степени доктора Лионского университета. Июнь 1984 года.

ной. Для решения этой задачи я разбил круг на полоски и сосчитал сумму разностей объемов соответствующих цилиндров вращения. Тем самым я пришел к необходимости найти сумму

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi. \qquad (*)$$

Дальнейшее, как всегда, было смесью изобретательности и глупости. Я прошел мимо элементарного решения с помощью обычной тригонометрии, но воспользовался формулой $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ *) (эта формула называется формулой Эйлера, но я этого не знал). Я получил эту формулу из глубоко поразивших меня рядов для синуса, косинуса и e^x. Далее, осталось найти сумму геометрической прогрессии $e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots$ и получить из нее сумму (*), что я и сделал.

На этой задаче я получил привычку обдумывать задачу и после ее решения. А именно: отодвинул окружность от прямой и понял, что при вращении получается тело, напоминающее резиновый круг, на котором си-

*) i — мнимая единица ($i^2 = -1$); о комплексных числах можно прочитать, например, в «Кванте» (1983, № 2, с. 16).

дел старый, страдающий геморроем, дедушка моего приятеля. Зная радиус окружности r и расстояние d от ее центра до прямой, я определил описанным ранее методом объем тела вращения — $2\pi^2 r^2 d$ — и поразился простоте этой формулы. Я записал ее в виде $\pi r^2 \cdot 2\pi d$ и понял, что если разрезать резиновый круг и вытянуть его в цилиндр со стороной, равной длине траектории, описываемой центром окружности, то объем у цилиндра будет тот же. Аналогичный факт имел место и для площади поверхности, и я понял, что это неспроста. Что будет, если вращать вместо окружности другую фигуру, например треугольник?

В этом случае объем тела вращения совпадает с объемом призмы, в основании которой лежит треугольник, а высота равна длине траектории точки пересечения его медиан. Из курса физики я догматически знал, что эта точка есть центр тяжести треугольника. Посмотрев, что происходит при вращении отрезка, я понял, что центр окружности и есть ее центр тяжести.

Общее определение центра тяжести я нашел в невесть откуда взявшемся учебнике сопромата и тут же принялся не только вращать различные фигуры, но и переносить их вдоль различных кривых и вычислять объемы полученных тел и площади их поверхностей. Здесь уже важна была строгость рассуждения. Я очень гордился тем, что, зная объем шара и площадь его поверхности, смог найти центр тяжести полукруга и полуокружности.

В дальнейшем мне повезло. В наш город приехал чрезвычайно, по моему тогдашнему мнению, образованный человек. Он окончил физмат Одесского пединститута. Среди привезенных им книг оказались «Теория определителей» Кагана и «Курс физики» Хвольсона. Книга Кагана была полезной и обстоятельной. В ней была даже глава об определителях бесконечного порядка.

Я должен также отметить учебник для средней школы по биологии Филиппенко, биолога из школы Н. К. Кольцова. Это была очень хорошая книга и она, конечно, повлияла на мои занятия биологией через 15—20 лет.

Возвратимся к математике. Меня по-прежнему интересовали задачи о площадях и объемах. Я начал с вычисления площади сегмента параболы. Эта задача сводится к вычислению суммы $1^2+2^2+\ldots+n^2$, и я ее решил без труда.

Тогда мне захотелось найти площадь под параболой p-й степени, где $p=2, 3, 4, \ldots$, т. е. найти сумму

$$S_0=1^p+2^p+\ldots+n^p$$

при любом целом положительном p.

По аналогии с формулой $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ я решил, что S_0 есть многочлен степени $p+1$ от n. Я не заметил, что для нахождения площади параболы достаточно знать лишь первый коэффициент многочлена S_0, и стал искать весь этот многочлен. Это оказалось очень интересно. Прежде всего, я еще обобщил задачу: обозначил $f(x)=x^p$ и стал искать сумму

$$S_0=f(1)+f(2)+\ldots+f(n).$$

Пусть $F(x)$ — такая функция, что $F'(x)=f(x)$. Из формулы Тейлора имеем:

$$F(2)-F(1)=f(1)+\frac{f'(1)}{2!}+\frac{f''(1)}{3!}+\ldots,$$

$$F(3)-F(2)=f(2)+\frac{f'(2)}{2!}+\frac{f''(2)}{3!}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(n+1)-F(n)=f(n)+\frac{f'(n)}{2!}+\frac{f''(n)}{3!}+\ldots$$

Складывая эти равенства, я получил

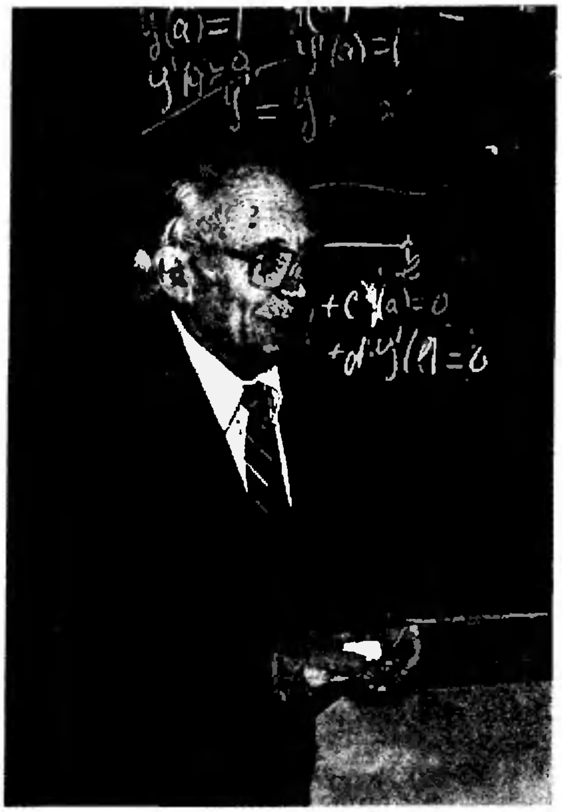
$$F(n+1)-F(1)=S_0+\frac{S_1}{2!}+\frac{S_2}{3!}+\ldots,$$

где S_0 — интересующая меня сумма, а

$$S_1=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n),$$
$$S_2=f''(1)+f''(2)+\ldots+f''(n),\ \ldots$$

Тогда я записал систему

$$F(n+1)-F(1)=S_0+\frac{S_1}{2!}+\frac{S_2}{3!}+\frac{S_3}{4!}+\ldots,$$
$$f(n+1)-f(1)=\quad S_1+\frac{S_2}{2!}+\frac{S_3}{3!}+\ldots,$$
$$f'(n+1)-f'(1)=\qquad S_2+\frac{S_3}{2!}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



И. М. Гельфанд делает доклад на семинаре по информатике. Январь 1988 года.

т. е. бесконечную систему с бесконечным числом неизвестных S_0, S_1, S_2, ... Я уже упомянул, что в книге Кагана были бесконечные определители, поэтому я смог воспользоваться «правилом Крамера» для нахождения S_0:

$$S_0=\frac{\begin{vmatrix} F(n+1)-F(1) & 1/2! & 1/3! & 1/4! & \ldots \\ f(n+1)-f(1) & 1 & 1/2! & 1/3! & \ldots \\ f'(n+1)-f'(1) & 0 & 1 & 1/2! & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}}{1}$$

Определитель в числителе этой «дроби» я разложил по первому столбцу, получив

$$S_0=B_0(F(n+1)-F(1))+B_1(f(n+1)-$$
$$-f(1))+B_2(f'(n+1)-f'(1))+\ldots, \qquad (1)$$

где $B_0=1$, B_1, B_2, ... — числовые определители бесконечного порядка. Полученное выражение называется *формулой Эйлера — Маклорена*, но я, конечно, об этом не знал. Чтобы его вычислить, нужно было найти коэффициенты B_0, B_1, B_2, ...

Для этого я применил соображения, которые сегодня назвали бы «функториальными». Именно, пользуясь тем, что коэффициенты B_0, B_1, ... не зависят от f, я подобрал такую функцию f, чтобы левая часть системы образовала геометрическую прогрессию (которую я умел суммировать). Для этого подходит функция $f(x)=e^{\alpha x}$, подставляя которую в формулу (1), я получил (проделайте выкладки!)

$$B_0+\alpha B_1+\alpha^2 B_2+\ldots=\frac{\alpha}{e^{\alpha}-1},$$

т. е. получил производящую функцию для нужных чисел B_0, B_1, B_2, ... (они называются *числами Бернулли*, а многочлен S_0 для $f(x)=x^p$ называется *многочленом Бернулли*).

Из этого периода я помню еще две задачи. Первая возникла из задачи в нашем задачнике по алгебре: выразить $x_1^2+x_2^2$ и $x_1^3+x_2^3$ через коэффициенты квадратного уравнения, корнями которого являются x_1 и x_2. Естественным обобщением является задача: выразить суммы $x_1^2+\ldots+x_n^2$ и $x_1^3+\ldots+x_n^3$, где x_1, ..., x_n — корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, через его коэффициенты. Здесь мне помогла теорема Безу, которую я узнал из учебника Давыдова. Я пошел дальше и поставил себе более общую задачу: выразить сумму k-х степеней корней алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты этого уравнения. Я решил эту задачу (ответ называется *формулой Ньютона*).

Вторая задача, которую я тогда решал, возникла, когда я обнаружил, что число $\cos ix$ — вещественное, ибо

$$\cos ix = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Я задумался над этим неожиданным фактом и доказал следующую общую теорему: *всякая четная вещественная функция принимает вещественные значения на мнимой оси.*

Чтобы это доказать, нужно было уточнить, что такое «функция». Я размышлял над тем, что называть функцией, и принял такое определение: функция — это сумма сходящегося бесконечного степенного ряда. После этого доказательство теоремы почти очевидно.

Эта задача, по-видимому, была последней, над которой я размышлял до своего приезда в Москву. Я ее решил летом 1929 года, а в следующие полгода, очень трудные для моей семьи и для меня, мне было не до математики.

Дальнейший период моих занятий, в Москве, в отличие от описанного, не был «чистым экспериментом». В Москве я уже был подвержен многим самым разнообразным влияниям, и мое развитие уже не шло своим собственным путем. В этот период, как я уже говорил, я учился самостоятельно в библиотеке им. В. И. Ленина, перебиваясь случайными заработками. Одно время даже был контролером в «Ленинке». Познакомился с университетскими студентами-математиками. Кто-то из них мне сказал, что мой интерес к выражениям вида $f(n+1)-f(n)$ связан с целой наукой, называемой теорией конечных разностей, и подсказал мне, что нужно прочитать книгу Nörlund'а «Differenzenkalkül» на эту тему. Книга была на немецком языке, но с помощью словаря я ее осилил.

Стал ходить на университетские семинары, и тут оказался под тяжелым психологическим прессом. Я обнаружил, что мой стиль занятий математикой никуда не годится. В математике появились новые веяния — новые требования в отношении строгости доказательств, большой интерес к теории функций действительного переменного (ТФДП). (Замечу, что сегодня и этот уровень строгости, и ТФДП считаются старомодными и устарелыми, но тогда...)

Тогда я осознал, что очень важно, что функция не обязана быть непрерывной, что непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой, что дифференцируемая функция не обязана быть дважды дифференцируемой и т. д.; что даже если у функции существуют производные всех порядков, то ее ряд Тейлора не обязан сходиться и что, даже если он сходится, его сумма не обязана совпадать со значением функции! Если это совпадение имеет место, то такая функция называется аналитической, и этот класс функций, утверждали приверженцы ТФДП, настолько узок, что находится за пределами главных интересов математики. А я только такие функции и рассматривал!

Под давлением этой точки зрения я прочитал «современный, строгий» учебник по анализу Валле Пуссена, похожий на те учебники, по которым сегодня учатся на мехмате МГУ, но лучший, чем они. Я поэтому с пониманием сочувствую первокурсникам мехмата, которых допускают к красотам математического анализа только после годового испытательного срока, испытания «строгим обоснованием» анализа.

Но и тут мне повезло. Я стал читать замечательный учебник И. И. Привалова по теории функций комплексного переменного. При этом я понял, почему для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ряд Тейлора расходится при $x=1$, хотя она и имеет непрерывный график (дело в том, что соответствующая комплексная функция имеет особенность при $x=i$). После первых 100 страниц я почувствовал, что на меня подул свежий ветер. Я выяснил, что для комплексной функции наличие первой производной означает, что есть и производные всех порядков, и ряд Тейлора сходится к значению функции (в некоторой области). Все встало на свои места, гармония оказалась восстановленной.

С разгона я прочитал книгу Гурвица и Куранта по теории эллиптических функций. Тут опять я попал впросак с модой — эта область тогда считалась устаревшей, о теории эллиптических функций отзывались примерно как о «слегка расширенной тригонометрии». Прошло много лет, прежде чем эта область вновь оказалась в центре внимания математиков.

В университете я ходил на семинары, которые мне очень много дали. Встречаясь с самыми разными математиками, я мог сопоставлять свои романтические, устаревшие (т. е. не идущие за модой) взгляды на математику с современным ее развитием. Я учился у многих замечательных математиков, стараюсь учиться и поныне.

Вскоре я прочитал, вернее проштудировал, замечательную книгу Гильберта и Куранта «Методы математической физики». Я тогда понял необходимость чтения основных работ. Важно при этом не жалеть времени на продумывание самых основ теории. К таким работам относится и работа Германа Вейля (1925 г.) о представлениях классических групп. Но, к сожалению, у нас тогда не были доступны более старые основополагающие работы Кэли, Шура и других авторов «предгильбертовского» периода.

Многому я тогда научился у Л. Г. Шнирельмана, М. А. Лаврентьева, Л. А. Люстерника, И. Г. Петровского, А. И. Плесснера и очень многому — у Андрея Николаевича Колмогорова. В частности, у него я научился тому, что в наше время настоящий математик должен быть натурфилософом.

Но мой рассказ стал превращаться в обычную научную биографию. Этот жанр обычно очень «misleading»*). Настоящая научная биография — это просто набор работ ученого. Его же собственные впечатления о написанных им работах ничуть не более значимы, чем впечатления любых других читателей, поэтому мне пора кончить свой рассказ.

Интервью записали В. С. Ретах и А. Б. Сосинский

В интервью с академиком И. М. Гельфандом упомянут целый ряд интересных задач и понятий, быть может, знакомых не всем нашим читателям. Предлагаем вам краткий комментарий. Надеемся, что вы получите удовольствие, решая задачи, которыми в свое время занимался И. М. Гельфанд!

1. *Пифагоровы тройки*, т. е. тройки целых чисел, способных служить длинами сторон прямоугольных треугольников, удовлетворяют уравнению $a^2+b^2=c^2$. Попробуйте найти общее решение этого уравнения (или посмотрите ответ в «Кванте» № 8 за 1986 г., с. 29).

2. Задачи. а) *Докажите, что максимум произведения двух неотрицательных чисел при фиксированной сумме a_1+a_2 достигается, когда числа равны.*

Из этой простой задачи почти автоматически получается более сильный результат:

б) *Максимум произведения неотрицательных чисел $a_1a_2...a_n$ при фиксированной сумме $a_1+a_2+...+a_n$ достигается, когда все числа равны.*

3. Задача. *Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:*

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\leqslant(a_1+a_2+...+a_n)/n.$$

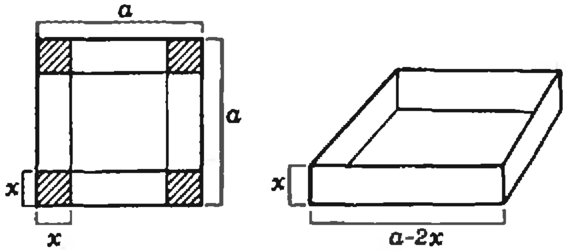
Указание: фиксируем сумму чисел и будем искать максимум их произведения.

4. Задача. *Из квадрата с заданной стороной вырезают квадратики, а из оставшейся*

*) Обманчив, создает неверные представления (англ.).

части делают коробку (см. рисунок). Какого размера квадратики надо вырезать, чтобы объем коробки был максимален?

Ясно, что нельзя вырезать очень маленькие квадратики, так как коробка получится слишком мелкой. Нельзя вырезать и очень большие квадратики, так как тогда коробка будет слишком узкой. Сколько же надо вырезать? Указание: объем коробки $V=x(a-2x)^2$. Бу-



дем искать максимум $4V=(4x)(a-2x)(a-2x)$, т. е. максимум произведения трех чисел, сумма которых равна $2a$.

5. Задача. *Вычислите суммы* $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$ и $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.

6. Вычисляя объемы и площади поверхности тел вращения, И. М. Гельфанд открыл для себя замечательные *теоремы Гульдина:*

объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести;

площадь поверхности тела вращения равна произведению длины границы фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой границы.

Задача. На каком расстоянии от центра находятся центры тяжести полукруга и полуокружности?

7. Чтобы познакомиться с определителями, решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, ее решение дается формулами:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Величина $a_1b_2-a_2b_1$, стоящая в знаменателе, обозначается через $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и называется *определителем.* В числителях тоже стоят определители $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Аналогично при решении системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

в знаменателе появляются определители третьего порядка. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

равен $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$. Обратите внимание на то, что в скобках стоят определители второго порядка. Такая запись определителя называется его *разложением по первому столбцу.*

Можно догадаться, из каких одночленов от переменных $a_1, a_2, \ldots, d_4$ состоит определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Гораздо труднее угадать, каковы знаки этих одночленов.

Квадратные таблицы из чисел называются (квадратными) *матрицами*, а соответствующие определители — *определителями матриц.* Интересно, что сейчас И. М. Гельфанд увлечен вопросом: чему должен быть равен определитель *кубической* матрицы? Когда ответ будет получен, он надеется рассказать об этом на страницах «Кванта».

8. Задача. *Докажите, что*

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$$

и

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4.$$

Замечательно, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$. Интересно, можно ли это доказать непосредственно?

Числа Бернулли дают возможность вычислить и общую сумму $1^p+2^p+\ldots+n^p$ как многочлен от n степени $p+1$.

9. Задачи. а) *Выразите сумму квадратов корней уравнения $x^2+px+q=0$ через его коэффициенты.*

б) *То же — для суммы кубов корней этого уравнения.*

в) *То же — для сумм квадратов и кубов корней уравнения*

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Указание: воспользуйтесь формулами Виета: $a_1=-(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $a_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$, $a_3=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения.

Решая общую задачу о том, как выражается сумма степеней корней уравнения через его коэффициенты, И. М. Гельфанд доказал *формулы Ньютона:*

$$p_k+a_1p_{k-1}+a_2p_{k-2}+\ldots+a_{k-1}p_1+ka_k=0,\ k\leqslant n,$$
$$p_k+a_1p_{k-1}+a_2p_{k-2}+\ldots+a_np_{k-n},\ k>n.$$

Здесь p_i обозначает сумму i-х степеней корней $x_1^i+x_2^i+\ldots+x_n^i$.

Формулы Ньютона можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно p_i с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если решить эту систему, то получится *формула Варинга,* прямо выражающая сумму степеней уравнения через его коэффициенты. В современной математике этот сюжет получил далекое развитие.

Из истории науки

Возможно, среди читателей «Кванта» есть такие, кто научную работу, открытия, изобретения связывает лишь с тишиной кабинетов, седовласыми академиками, степенными докторами наук... Жизнь, и это прекрасно, намного разнообразнее. В науке, как и в других сферах человеческой деятельности, есть место и страстям, и шуткам. Хотите убедиться? Познакомьтесь с историями, относящимися ко времени первых исследований атмосферного электричества.

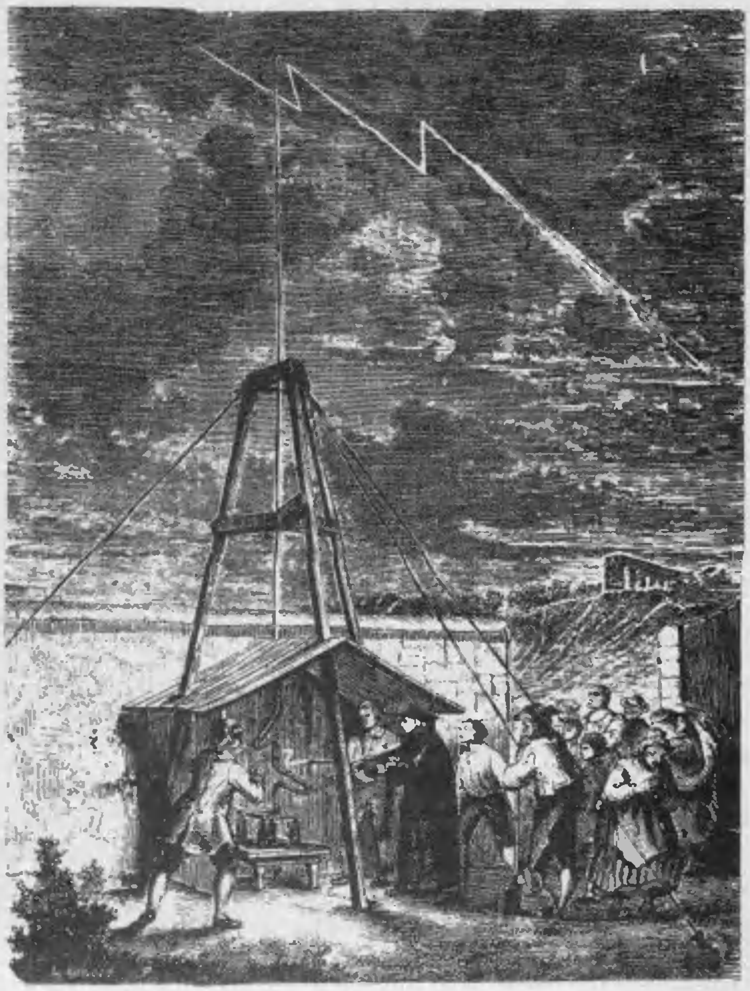
Громоотвод, политика и... шляпки

Любитель наук из Филадельфии (штат Пенсильвания) Бенджамин Франклин, впоследствии дипломат и член многих академий наук, в том числе и Петербургской, в 1749 году записал в своем рабочем журнале идею опыта, который должен был подтвердить электрическую природу грозовых явлений, а в 1750 году в письме английскому ученому Питеру Коллинсону предложил громоотвод — заземленный металлический стержень, возвышающийся над защищаемым объектом.

Весной 1752 года опыт по замыслу Франклина был успешно выполнен во Франции — из металлического шеста, установленного в будке на изоляторе, в грозу были извлечены искры. Несколько позже (в том же году) в Филадельфии сам Франклин осуществил опыт с «электрическим змеем» — извлек искры из влажной от дождя бечевки, на которой был запущен змей с металлическим острием и которую Франклин, находясь в укрытии, держал за привязанную к ней шелковую ленту. Вскоре появились первые громоотводы, хотя их внедрение проходило отнюдь не гладко. Зачастую отрицали способность громоотвода выполнять его защитную функцию, зато утверждали, что громоотвод «притягивает» молнию к соседним объектам.

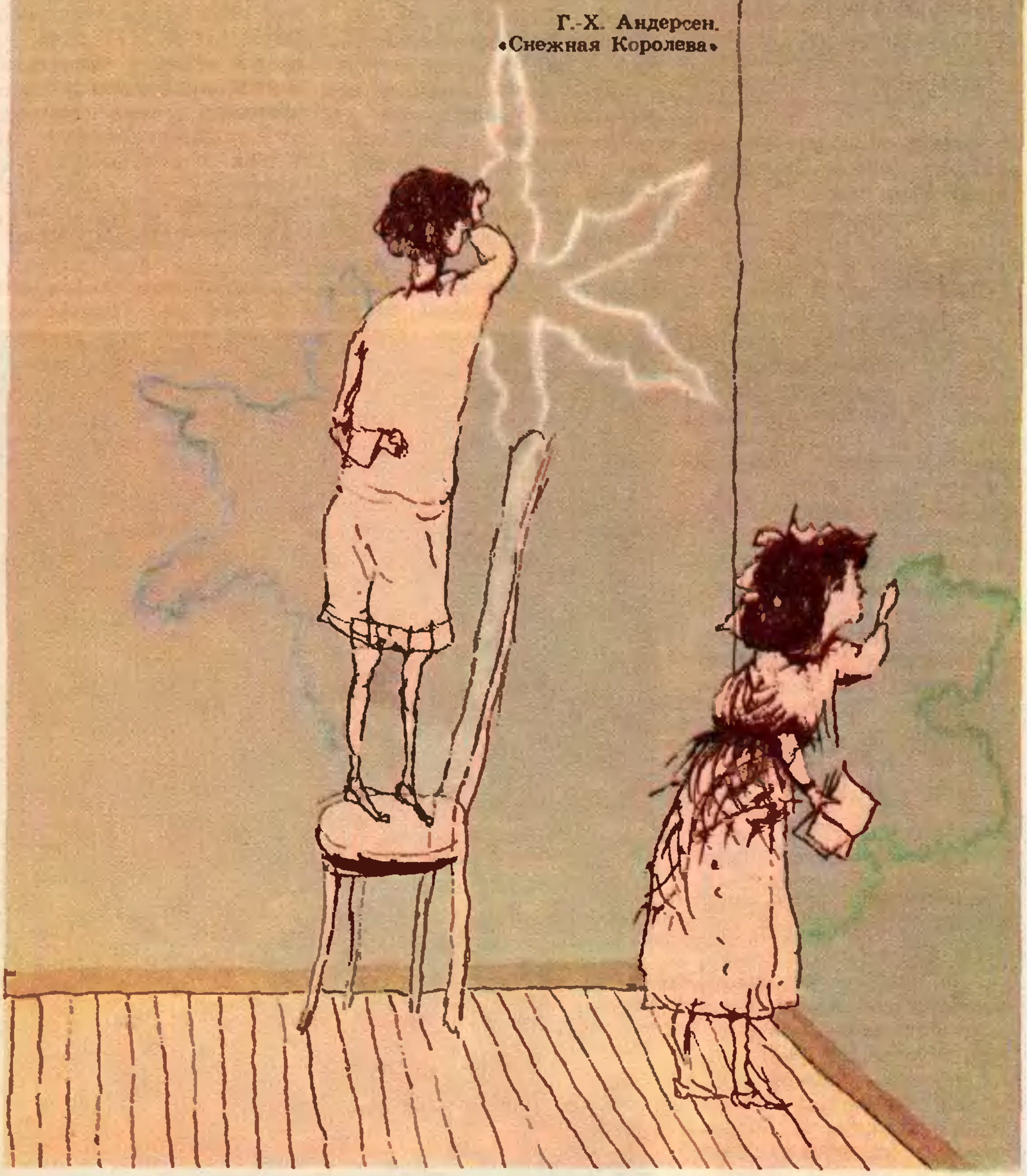
Англичанин Бенджамин Вильсон, возражая своему великому американскому тезке, упорно доказывал, что для защиты от молнии подходят проводники с тупыми вершинами, а не острыми. Сложилась ситуация, которая напоминала борьбу тупоконечников с остроконечниками из «Путешествий Гулливера» Джонатана Свифта (первое издание книги вышло в 1726 году). Лондонское Королевское общество (академия наук) выступило против мнимого усовершенствования, предложенного Вильсоном. Тем не менее король Георг III в 1777 году, во время войны с американскими колониями, которые боролись за независимость от Англии, велел заменить у себя остроконечные громоотводы на тупоконечные, чтобы не пользоваться изобретением противника.

(Продолжение см. на с. 20)



Под увеличительным стеклом снежинки
казались гораздо более крупными,
чем были на самом деле,
и походили на роскошные цветы
или десятиконечные звезды.
Видишь, как хорошо сделано! —
сказал Кай.— Снежинки гораздо
интереснее настоящих цветов!
И какая точность!
Ах, если бы только
они не таяли!

Г.-Х. Андерсен.
«Снежная Королева»



ЛЕД-ИКС

Кандидат физико-математических наук
А. В. ЗАРЕЦКИЙ

Лед всегда представлялся человеку символом красоты, точности, величия. Но красоты суровой, красоты, несущей в себе холод, зло, а порой и смерть. Недаром Данте представлялось, что лед должен находиться в самом центре Земли, у последней ступени, ведущей в Ад, а сокровища Сатаны скрыты в ледяном сундуке.

Бесспорно, исследование художником явлений природы и законов мироздания идет через его эмоциональное восприятие окружающего мира. Ученый же должен быть бесстрастен, как при выборе объекта исследования, так и при анализе многочисленных (и порой противоречивых) данных.

А чем может быть интересен лед с точки зрения физики?

Химическая формула льда — H_2O. При охлаждении вода замерзает, выражаясь точнее, кристаллизуется. В настоящее время обнаружено тринадцать (!) различных структурных форм льда. Пусть это число считается некоторыми несчастливым, но оно ставит лед в особое положение — ни одно столь же простое по химическому составу вещество не может похвастать таким обилием фазовых переходов. Вот и первый повод пристальней приглядеться к этому объекту.

На рисунке 1 показана практически вся фазовая диаграмма H_2O. Она изучена достаточно неплохо, хотя все еще богата белыми пятнами. Достаточно сказать, что лед-X и лед-XI были обнаружены всего лишь несколько лет назад. Лед, к которому мы все привыкли, тоже указан на диаграмме — это лед-I, или, точнее, лед-I_h. При нормальном давлении и 0 °C его удельная плотность $0{,}917 \times 10^3$ кг·м$^{-3}$, он легче воды, т. е. в процессе кристаллизации плотность воды уменьшается.

Это совершенно необычное свойство льда (ведь обычно кристаллизация ведет к увеличению плотности) имеет громадное значение для жизни на Земле. Ледяной панцирь, образующийся на поверхности воды, создает столь эффективную теплоизоляцию, что водоемы редко промерзают на всю глубину. Не хочется и думать, что было бы с подводным миром, будь лед хоть чуточку тяжелее воды!

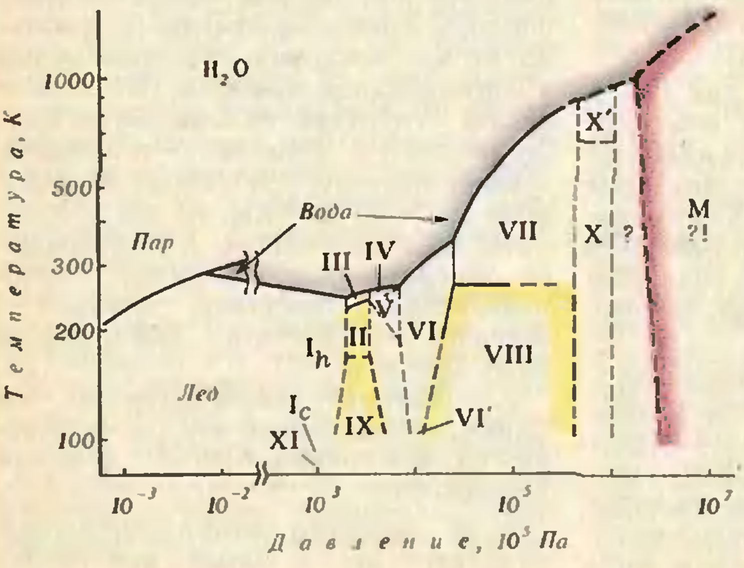


Рис. 1.

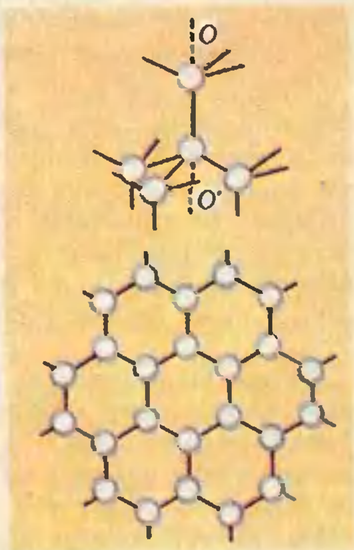


Рис. 2.

Давайте теперь рассмотрим кристаллическую структуру льда-I_h. Еще в 1917 году были проведены первые рентгенографические исследования. С кислородом разобраться было сравнительно несложно. В 1922 году английский физик У. Брэгг показал, что каждый атом кислорода должен находиться примерно в центре масс своих ближайших соседей. Скоро стало ясно, что кислородная решетка имеет так называемую гексагональную структуру и выглядит так, как показано на рисунке 2. Посмотрите внимательно — поворот решетки на 60° вокруг оси OO' оставляет решетку неизменной. Именно поэтому при всем многообразии снежинок (а ведь снег — это тоже лед) они симметричны. (Только великий сказочник Андерсен немного ошибся — снежинки похожи не на десяти-, а на шестиконечные звезды.)

А вот определить правильное расположение атомов водорода долго не удавалось. Дело в том, что рентгеновские лучи рассеиваются, в основном, на электронах. А электроны почти все время находятся около атомов кислорода, и поэтому обнаружить водородные атомы при помощи дифракции рентгеновских лучей очень трудно. Вначале считали, что атомы водорода располагаются посередине между ближайшими атомами кислорода. Это очень симметричная структура. Но давайте подумаем вместе, насколько она реальна.

Прежде всего ясно, что, так как в такой решетке все атомы водорода находятся посередине между атомами кислорода, мы имеем дело с типичным ионным соединением. Но диэлектрическая проницаемость таких веществ обычно меньше 10, а у льда она около 100, т. е. на порядок больше. Неувязка.

Далее. Оказывается, в инфракрасной области спектры льда, воды и водяного пара (а водяной пар — это фактически отдельные молекулы H_2O) чрезвычайно похожи. А эти спектры отражают молекулярную структуру вещества. Значит, в кристалле льда молекула воды «сохраняется». Такие кристаллы называются молекулярными. Займемся теперь несложной арифметикой. Из рентгенографических данных известно расстояние между атомами кислорода в льде — 2,76 Å (1 Å$=10^{-10}$ м). Значит, в симметричной модели водородные атомы должны были бы располагаться на расстоянии 1,38 Å от атомов кислорода. Но в «самостоятельной» молекуле воды расстояние O — H равно 0,96 Å, что никак не согласуется с симметричной моделью.

Итак, стало ясно, что необходимо искать такую структуру, в которой сохраняется определенная самостоятельность молекулы H_2O. Несколько таких структур было предложено английскими физиками Дж. Берналом и Р. Фаулером в 1933 году. Решетки получились очень сложными, и может быть поэтому в заключение своей работы Бернал и Фаулер предложили совершенно необычную модель льда. По их гипотезе, в предплавильной области лед может оставаться кристаллическим только в смысле расположения целых молекул воды, но ориентация самих молекул может быть в определенной степени произвольной.

Эту чрезвычайно важную и очень интересную мысль развил американский физик и химик Л. Полинг. Согласно его представлениям лед-I_h является кристаллом только по отношению к атомам кислорода (т. е. только атомы кислорода располагаются в определенном порядке, образуя в общей структуре независимую кристаллическую решетку — так называемую подрешетку). Атомы же водорода не упорядочены, но их координаты не произвольны, а подчиняются определенным правилам — так называемым правилам Бернала — Фаулера — Полинга (БФП-правилам). Вот они:

1. Протоны располагаются на линии, соединяющей атомы кислорода, на расстоянии 0,95 Å от атома кислорода.

2. У каждого атома кислорода находятся два и только два протона.

3. Между соседними атомами кислорода находится один и только один протон.

На рисунке 3, *а* схематически показан элемент решетки льда, удовлетворяющий БФП-правилам.

Итак, лед-I_h не является в классическом смысле слова ни кристаллическим (разупорядочена водородная подрешетка), ни аморфным (упорядочена кислородная подрешетка) твердым телом. И вновь повод для физических исследований, да еще какой!

Так что же, лед *никогда* не бывает «настоящим кристаллом»?

Чтобы четко ответить на этот вопрос, нужно уточнить, какой лед имеется в виду. Дело в том, что лед-II, лед-VIII, лед-IX, лед-XI являются такими «настоящими кристаллами». В этих модификациях льда и атомы кислорода, и атомы водорода упорядочены и занимают вполне определенные места.

Еще более интересным является лед-X. Хотя споры по поводу структуры этого льда пока не стихают, видимо, можно считать установленным, что в льде-X атомы водорода находятся как раз *посередине между соседними атомами кислорода*. Но вглядитесь в фазовую диаграмму. Для получения такой структуры требуется сжать воду до давления порядка 50 ГПа ($50 \cdot 10^9$ Па), т. е. на 1 мм^2 необходимо «положить» груз в 5 тонн!

А если увеличивать давление дальше? Что будет со льдом? Экспериментально ответить на этот вопрос, к сожалению, пока нельзя. Но ученые считают, что при увеличении давления еще на порядок лед станет... металлом. Металлический лед! Пока это кажется фантастикой. Что ж, поживем — увидим.

Вернемся к нашему «обычному» льду — льду-I_h. Известно, что при охлаждении *все твердые тела стремятся к упорядочению своей структуры*. Значит, при охлаждении льда-I_h протоны рано или поздно должны занять вполне определенные «кристаллические позиции». Теоретические оценки показывают, что при

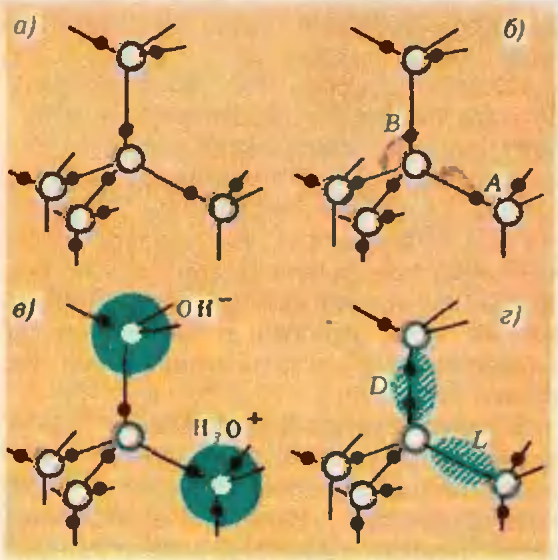


Рис. 3.

температуре 60 — 70 К упорядочение протонов энергетически выгодно. Итак, чтобы лед-I_h стал «настоящим кристаллом», надо понижать температуру. Но при охлаждении увеличивается характерное время перераспределения протонов (*чем холоднее*, тем медленнее «передвигаются» протоны по кислородной подрешетке). В химически чистом льде при 120 К протоны перераспределяются за 10 с, при 100 К — за час, при 90—95 К — за день. При температуре кипения жидкого азота (78 К) придется ждать год, пока выстроится упорядоченная водородная подрешетка, а уже при 70—73 К на это потребуется *целая человеческая жизнь*! И не дай бог сразу понизить температуру до 40—45 К — при этой температуре время перераспределения протонов равно... возрасту Вселенной (5×10^{17} с).

Правила Бернала — Фаулера — Полинга объясняют многие свойства льда. Но представьте себе кристалл, в котором бы эти правила выполнялись абсолютно строго. Посмотрите внимательно на решетку льда (рисунок 3, *а*) — возможно ли в ней движение протонов? Оказывается, нет. Стоит протону *А* переместиться так, как указано на рисунке 3, *б*, и сразу нарушится 2-й пункт БФП-правил. Движение протона *В по пути*, указанному на рисунке 3, *б*, приводит к нарушению пункта 3.

Но ведь известно, что лед не является идеальным диэлектриком, а обладает вполне измеримой электропроводностью, причем протонной. Значит, протоны могут двигаться! Так что же — БФП-правила не верны? Правильней всего ответить так: они почти всегда верны, но именно исключениями из этих правил и обусловлены удивительные электрические свойства льда.

В конце пятидесятых годов швейцарский физик Жаккар предложил очень изящный способ описания этих электрических свойств движением своеобразных дефектов, возникающих именно при нарушении БФП-правил. Это очень необычный механизм электропроводности, поэтому давайте рассмотрим его подробней.

«Испортим» решетку льда, нарушив 2-е из БФП-правил: от одного атома кислорода уберем протон, а другому добавим — как на рисунке 3, *в*. Мы получим так называемые ионные дефекты (их обозначают OH^- и H_3O^+). Теперь испортим решетку, нарушив правило 3,— так, как показано на рисунке 3, *г*. При этом возникнут ориентационные дефекты (так называемые *L*- и *D*-дефекты).

Дефекты всегда присутствуют в реальной структуре льда, но их очень мало — в химически чистом льде при температуре — 10 °С на $3 \cdot 10^{11}$ молекул воды приходится около 10^5 ориентационных дефектов и всего лишь пара ионных дефектов.

На рисунке 4, *а* показано, как может происходить движение протонов. Рассмотрим ионный дефект H_3O^+. Протон *1* переходит на место, отмеченное крестиком. Раньше H_3O^+-ион был у кислородного атома I, а теперь он будет находиться у кислорода II. Далее протон *2* переходит на место, тоже отмеченное крестиком,— теперь ион H_3O^+ находится уже у атома III, и т. д. Мы видим, что каждый раз движутся разные протоны, как бы передавая друг другу эстафету. И в результате H_3O^+-ион «проходит» весь путь «сам». На рисунке 4, *б* показана решетка льда после перемещения H_3O^+-иона из положения I в положение X.

Мы для наглядности взяли гипотетическую плоскую квадратную решетку льда. В этой решетке у каждого атома кислорода оказывается четыре эквивалентных кислородных соседа, как и в реальной трехмерной решетке, и поэтому все полученные здесь выводы справедливы и для истинной решетки льда. Попробуйте сами разобраться, как движутся OH^--ионы, *L*- и *D*-дефекты.

Оказалось, что и в некоторых других веществах механизм проводимости такой же. Сейчас даже многие биохимики с вниманием следят за изучением механизма электропроводности льда, поскольку в ряде биологических объектов перенос протонов очень напоминает движение протонов в льде.

Теория Жаккара многое объяснила, но с каждым годом растет число экспериментальных фактов, которые требуют дальнейшего углубления существующих представлений. Появляются новые, и порой очень необычные, гипотезы. Согласно одной из таких смелых гипотез, истинными носителями заряда в льде являются электроны, «оседлавшие» движущиеся протонные дефекты. Так ли это — покажет время.

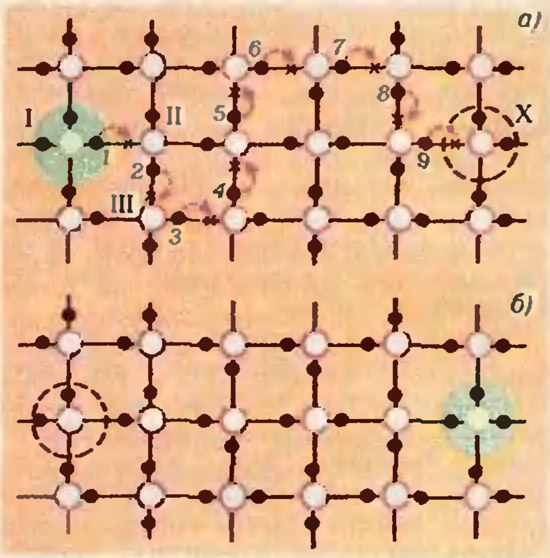


Рис. 4.

Объемные свойства льда представляются достаточно необычными и даже экзотичными, но свойства поверхности льда еще удивительней.

Разбудите любого человека среди ночи и спросите, при какой температуре плавится лед? «Конечно, при 0 °С». Но вот на вопрос «при какой температуре начинает плавиться поверхность льда?», пожалуй, не смогут однозначно ответить даже специалисты по физике льда.

С точки зрения фундаментальной науки исследования поверхности льда чрезвычайно интересны. Но эти исследования имеют не меньшее, если не большее, прикладное значение. Движение ледоколов, борьба с оледенением кораблей и самолетов, строительство в полярных и заполярных областях, движение ледников — во всех этих случаях важно знать, что же происходит на поверхности льда, т. е. на границе раздела лед — металл, пластик, различный грунт и т. д. Необходимо знать механизмы сцепления льда с различными конструкционными материалами, характер и величину трения и тому подобные характеристики. А как нужны материалы с минимальным коэффициентом трения для различных спортивных снарядов!

Кстати, а почему многие материалы так хорошо скользят по льду?

Возможно, этот вопрос многим покажется простым. Ведь хорошее скольжение — это когда между телом и льдом имеется слой воды. А когда тело сильно давит на лед, он плавится — под давлением плавление начинается при более низкой температуре.

Давайте разберемся. Как следует из фазовой диаграммы, температура плавления льда понижается на 1 градус при дополнительном давлении $\Delta p = 10^7$ Па. Пусть масса конькобежца $M = 60$ кг, а сечение конька $S = 3 \cdot 200$ мм$^2 = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2; тогда дополнительное давление будет $\Delta p = Mg/S = 10^6$ Па. Значит, под коньком температура плавления понизится только на... 0,1 °С. А как же катание при —10 °С? Да, объяснение хорошего скольжения, видимо, в чем-то другом.

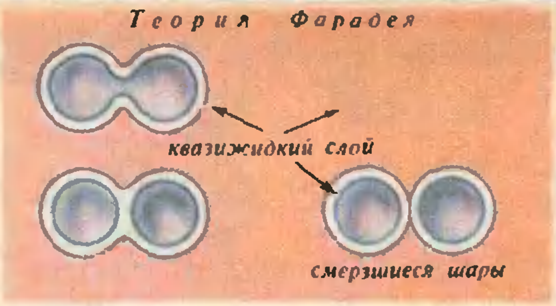


Рис. 5.

Считают, что в предплавильной области температур на поверхности кристаллического льда находится тонкий квазижидкий слой («квази» означает «почти» или «как будто»). Вряд ли эта тонкая пленка — обычная жидкость. Однако многие ее свойства очень близки к свойствам воды. В некоторых экспериментах существование квазижидкого слоя прослеживается даже при —30 °С, т. е. за 30 градусов до плавления!

Может быть, наличие квазижидкого слоя обусловливает небольшой коэффициент трения? Подобное предположение позволяет многое объяснить, но, к сожалению, истинная природа значительно сложнее, и ее еще предстоит понять.

Кстати, между концепциями «квазижидкого слоя» и «плавления давлением» спор идет уже более столетия. У истоков этого спора имена замечательных физиков — Фарадея и братьев Томсонов (один из них известен всем как лорд Кельвин). Да, да, эти всемирно известные ученые тоже изучали лед.

Не сомневаюсь, что все вы играли в снежки. Но не задумывались ли вы, а почему так легко слепить снежок? Снег — это не тесто, не пластилин, а небольшие кристаллы (!) льда. Ведь из металлических опилок «снежок» не слепить, а из льда — пожалуйста. Не задумывались?

А вот Майкл Фарадей более ста лет тому назад, видимо, задумался. В 1850 году он обратил внимание на следующий факт: куски льда смерзаются, если их привести в соприкосновение при температуре около 0 °С. Почему? Именно для объяснения этого факта Фарадей и предположил,

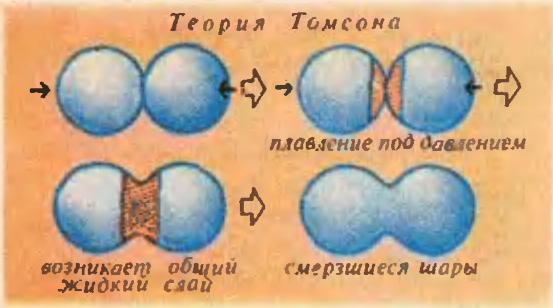


Рис. 6.

что на поверхности льда есть особый — квазижидкий — слой.

Давайте теперь посмотрим на рисунок 5, и я думаю, вам сразу станет ясно, почему наличие квазижидкого слоя приводит к смерзанию двух кусков льда.

Именно наличием квазижидкого слоя пытались объяснить очень большую *пластичность* льда и движение ледников.

Авторитет Фарадея был очень велик, но у него нашелся оппонент — Джеймс Томсон (брат *лорда* Кельвина). Он обратил внимание на известную тогда часть фазовой диаграммы льда и теоретически доказал, что при сжатии лед должен плавиться. А значит, если сдавить два куска льда, они должны сплавиться (посмотрите на рисунок 6).

Фарадей провел серию экспериментов, опровергающих точку зрения Томсона, но в то время этот вопрос так до конца и не был решен. Изящные гипотезы Фарадея и Томсона, бесспорно, имеют под собой реальную почву, но истинное положение дел, видимо, посередине.

Мы рассмотрели здесь более или менее подробно только некоторые физические свойства льда. Многие атмосферные процессы и природные явления определяются *различными* свойствами льда. Совсем недавно стало известно, что быстрая кристаллизация льда сопровождается свечением. Может быть, полярное сияние тоже как-то связано со свойствами льда?

Лед очень широко распространен и в космосе. Марс, Юпитер, Сатурн содержат огромные массы льда, а многие астероиды и даже некоторые спутники планет состоят из *него полностью*.

Многие поставленные вопросы все еще не решены. А сколько явлений и модификаций льда еще скрыто от ученых? Проблем и гипотез много. Может быть, кому-нибудь из вас посчастливится закрасить одно из белых пятен физики льда. А может быть, вы обозначите контуры новых неизведанных областей и обнаружите, например, еще никому *не известную* форму льда — «лед-ИКС»? И тогда...

Громоотвод, политика и... шляпки

(Начало см. на с. 13)

В связи с этим появилась эпиграмма:

Тупым проводником в восторг
Был приведен король Георг,
Но в нации разброд.
А Франклину все громы — вздор,
У Франклина острее взор,
Острей громоотвод.

Когда Георг менял свои громоотводы, на шпиле Петропавловской крепости в Петербурге уже возвышался громоотвод (вероятно, первый в нашей стране).

Следует заметить, что в действительности форма громоотвода обычно не имеет значения. Но вот если вершина громоотвода находится на таком *большом* расстоянии от земли, что оно сравнимо с высотой грозового облака (*например, в случае громоотводов* на самых высоких небоскребах), то удается наблюдать тихий разряд с острия громоотвода, не переходящий в *молнию, как* и предполагал Франклин, ратуя за «тихий» громоотвод с заостренной верши*ной. Удивительно* точно писал Франклин в 1767 году: «Заостренный таким образом пруток либо предотвращает удар молнии из облака, либо же при ударе отводит его в землю без ущерба для здания».

(Окончание см. на с. 33)

Задачник „Кванта"

Задачи
М1141—М1145, Ф1148—Ф1152

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1141» или «Ф1148». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1141. Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45°.

Н. М. Седракян

М1142. Таблица $m \times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s. Чему равна сумма всех чисел в таблице?

М1143. Масса каждой из 101 гирек, расположенных по окружности,— натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.

В. В. Произволов

М1144. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988}+a_2^{1988}+\ldots+a_n^{1988}} \text{ или } \sqrt[1989]{a_1^{1989}+a_2^{1989}+\ldots+a_n^{1989}}?$$

А. И. Шехорский

М1145*. Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC > 90°$. На меньшей дуге BC взята точка A. Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A, не превосходит площади треугольника ABC.

В. Ю. Протасов

Ф1148. Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, кладут на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, так, как показано иа рисунке 1. В тот момент, когда нить была вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра была равна ω. Определить, чему равна в этот момент: а) скорость оси цилиндра; б) скорость точки цилиндра, касающейся наклонной плоскости. Радиус цилиндра равен R.

С. С. Кротов

Ф1149. На проводящие рельсы игрушечной железной дороги беспорядочно бросают, замыкая рельсы, тонкие длинные оголенные проводники из меди. Оценить сопротивление между рельсами, если расстояние между ними равно $l=5$ см, диаметр проводника $d=0{,}2$ мм, его длина $h=30$ см, бросили $N=100$ проводников.

А. Р. Зильберман

Ф1150. К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найти теплоемкость газа (в расчете на 1 моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.

А. А. Шеронов

Ф1151*. Электростатический вольтметр представляет собой плоский конденсатор, одна из пластин которого

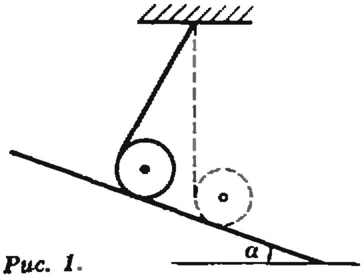


Рис. 1.

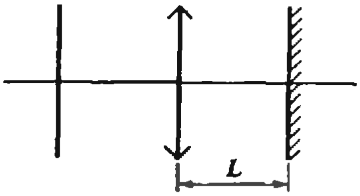


Рис. 2.

закреплена неподвижно, а другая может двигаться, оставаясь параллельной первой пластине. Подвижная пластина прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью $k=10$ Н/м. Начальное расстояние между пластинами $d=3$ см, площадь каждой пластины $S=0{,}5$ м^2. Рассчитать шкалу вольтметра. Какое максимальное напряжение можно измерять с его помощью? Рассмотреть отдельно случаи, когда вязкое трение очень мало и довольно велико.

А. Р. Зильберман

Ф1152. За линзой на расстоянии $l=4$ см (больше фокусного) расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Перед линзой, также перпендикулярно главной оптической оси, расположен лист клетчатой бумаги (рис. 2). На этом листе получают изображения его клеток при двух положениях листа относительно линзы. Эти положения отличаются на $l=9$ см. Определить фокусное расстояние линзы.

Е. П. Кузнецов

Решения задач
М1116—М1120, Ф1128—Ф1132

М1116. *Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью а) 36; б) S, стороны которого идут по линиям сетки? (Считаются узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки принята за 1.)*

Ответ: а) 74; б) $2S+2$.

Прямоугольник размером $m\times n$ клеток содержит $f=(m+1)(n+1)$ узлов. При данной площади $mn=S$ величина

$$f=S+m+n+1=S+m+\frac{S}{m}+1$$

принимает наибольшее значение $2S+2$ при $m=1$ или $m=S$ (для прямоугольника размером $1\times S$). При других m $(1<m<S)$ величина f меньше $2S+2$. Это следует из неравенства $m+\frac{S}{m}<S+1$, которое эквивалентно очевидному неравенству $(m-S)(m-1)<0$. Заметим, что верно более общее утверждение: при заданном S (S — целое или полуцелое число) из всех многоугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги самое большое число узлов содержит многоугольник, не имеющий внутренних узлов. Это следует из формулы Пика для площади S таких многоугольников*): $S=i+\frac{r}{2}-1$, где i — число узлов, лежащих внутри многоугольника, а r — число узлов на его границе: общее число узлов равно $i+r\leqslant 2i+r=2S+2$. (Неравенство превращается в равенство только при $i=0$.)

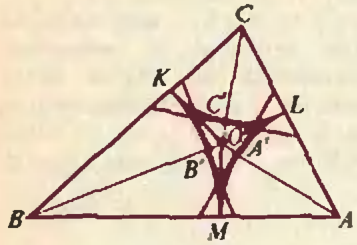
В. Л. Гутенмахер

М1117. *Дан произвольный треугольник. Докажите, что: а) можно построить три окружности с центрами в его вершинах, по-*

Точки K, L, M — это точки касания сторон данного треугольника ABC со вписанной в него окружностью (см. рисунок; если $OK=OL=OM$ — радиусы вписанной

*) См. статью «Вокруг формулы Пика», «Квант», 1974, № 12.

парно касающиеся друг друга (в точках K, L, M); б) если через середину каждой дуги KL, LM, MK, лежащей внутри треугольника, провести касательную к ней, то образуется четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трех других.



Задачник „Кванта"

окружности, то $CK=CL$, $AL=AM$ и $BM=BK$ как отрезки касательных ко вписанной окружности, причем дуги соответствующих радиусов с центрами C, A и B в своих концах K, L и M касаются радиусов OK, OL и OM).

Касательная, проведенная через середину C' дуги KL (с центром C), отсекает от $\triangle ABC$ равнобедренный треугольник, по площади равный четырехугольнику $CKOL$: высота CC' разрезает этот равнобедренный треугольник на два прямоугольных, равных $\triangle KCO = \triangle LCO$. Тут следует еще отметить, что эта касательная (на рисунке — красная) всегда пересекает стороны CA и CB (угол COB тупой, поскольку полусумма двух углов B и C треугольника ABC меньше $90°$, поэтому гипотенуза CO треугольника COK меньше CB; аналогично $\angle COA > 90°$, и поэтому $CO < CA$). Аналогичная перестройка для двух других красных касательных превращает равнобедренные треугольники с высотами AA' и BB' в четырехугольники $ALOM$ и $BMOK$. Таким образом, сумма площадей трех равнобедренных треугольников с красными основаниями равна площади треугольника ABC. Отсюда вытекает последнее утверждение задачи: площадь, не покрытая треугольниками, равна площади, покрытой ими дважды.

А. А. Горбачев

М1118. *а) Докажите, что уравнение*

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \quad (*)$$

имеет бесконечно много решений в целых числах (x, y, z), не имеющих общего делителя, большего 1.
б) Сколько имеется таких решений, у которых $z=1988$?

а) Перепишем уравнение (*) в виде

$$xy+yz+zx=0.$$

Заметим, что если одно из неизвестных равно 0, то и некоторые другие — тоже 0; в дальнейшем мы не будем рассматривать такие тривиальные решения. Пусть d — наибольший общий делитель x и y, $x=da$, $y=db$. Тогда $z=-xy/(x+y)=-dab/(a+b)$, где a, b и $a+b$ попарно взаимно просты, так что d делится на $a+b$: $d=k(a+b)$. Отсюда получаем общую формулу для нетривиальных решений:

$$x=ka(a+b), \quad y=kb(a+b), \quad z=-kab,$$

где a, b, k — целые, причем a и b взаимно просты. При $k=1$ получаем всевозможные различные решения из чисел, не имеющих общего делителя, большего 1.

б) Ответ: 16. Вопрос сводится к тому, сколькими способами можно представить 1988 в виде произведения $-ab$, где a и b — взаимно простые целые числа. Поскольку $1988=4\cdot 7\cdot 71$, в роли a можно взять произведение некоторых из четырех чисел — 1, 4, 7, 71 (тогда b будет произведением остальных; произведением «пустого множества» естественно считать 1.)

С. Г. Мамиконян, Н. Б. Васильев

М1119. *Назовем k-звездой фигуру на плоскости, состоящую из k лучей с общим началом разбивающих плоскость на k рав-*

Ответ: при $k=3$ и $k=4$. При $k=3$ в качестве центра O 3-звезды можно взять, например, основание высоты треугольника с вершинами в трех данных точках, опущенной на наибольшую сторону, и один из лучей направить по продолжению этой высоты (рис. 1).

ных углов (по $360°/k$). При каких $k>2$ верно следующее утверждение: для любых k точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует k-звезда, в каждом из k углов которой содержится ровно одна из этих k точек?

Задачник «Кванта»

При $k=4$ рассмотрим два случая. Если точки лежат в вершинах выпуклого четырехугольника, то за центр 4-звезды можно взять точку пересечения его диагоналей, а лучи направить по биссектрисам углов между ними (рис. 2). Если одна из точек D лежит внутри треугольника ABC с вершинами в трех других и $\angle ADB \geq 90°$, то в качестве O можно выбрать точку пересечения отрезка DC и некоторой полуокружности, диаметр которой A_1B_1 целиком лежит на отрезке AB, а лучи направить по прямым OA_1 и OB_1 (рис. 3).

Чтобы доказать, что для $k=5$ (и $k>5$) утверждение неверно, достаточно привести *пример*; в качестве такового годятся 5 точек, лежащие на одной дуге величиной $\alpha<72°$. В самом деле, если дуга α пересекает четыре из пяти лучей 5-звезды с центром O, то $\alpha>72°$. (поскольку полусумма дуг AB' и $A'B$ на рисунке 4 равна $\angle AOB'=36°$.

М. Хованов

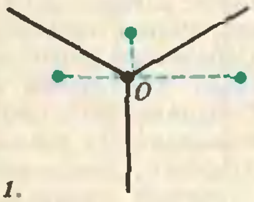


Рис. 1.

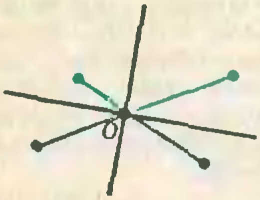


Рис. 2.

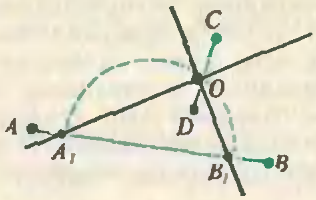


Рис. 3

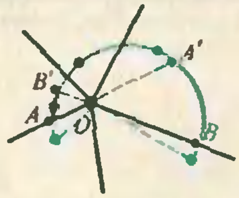


Рис. 4.

М1120. *а) Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана соотношениями $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x\geq 0$. Докажите, что для любых натуральных m и k*

$$НОД(a_m, a_k)=a_{НОД(m,k)}.$$

б) Докажите аналогичное утверждение для последовательности Фибоначчи $a_0=0, a_1=1, a_2=1, a_3=2, \ldots$, задаваемой условием: $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=1,2,\ldots$

Докажем общее утверждение: *если последовательность $a_0=0$, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ целых чисел такова, что*

$$НОД(a_m, a_k)=НОД(a_{m-k}, a_k) \qquad (1)$$

для любых $m>k\geq 1$, то

$$НОД(a_m, a_k)=a_d, \qquad (2)$$

где $d=НОД(m, k)$.

В самом деле, для любой пары начальных значений m, k повторение операции

$$(m, k)\to(m-k, m)$$

(из большего числа пары вычитается меньшее) приводит к паре $(d, 0)$, где $d=НОД\ (m, k)$; это вариант *алгоритма Евклида* для отыскания наибольшего общего делителя чисел m, n, изложенный в учебнике информатики для 9 класса (обычно алгоритмом Евклида называют его «сокращенный» вид, состоящий из последовательности делений с остатком.

Таким образом, из равенств (1) следует, что

$$НОД(a_m, a_k)=НОД(a_d, a_0)=НОД(a_d, 0)=a_d$$

— это и есть (2).

а) Положим $\underbrace{P(P(P}_{n}\ldots(P(x))\ldots))=P_n(x)$; это многочлен с целыми коэффициентами, причем $a_m=P_m(a_0)$ и $a_m=P_{m-k}(a_k)$ при $m>k$. Заметим, что $P_n(x)=a_n+xQ_n(x)$, где $Q_n(x)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами. Проверим (1): при $m>k\geq 1$

$НОД(a_m, a_k)=НОД(P_{m-k}(a_k), a_k)=НОД(a_{m-k}+$

$$+a_kQ_{m-k}(a_k),\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k},\ a_k).$$

б) Для чисел Фибоначчи при любых $m>k\geqslant 0$ выполнено равенство

$$a_m=a_{m-k}a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k. \qquad (3)$$

В самом деле, $a_m=a_{m-1}+a_{m-2}$ (при $k=1$),

$$a_m=2a_{m-2}+a_{m-3}(k=2),\ a_m=3a_{m-3}+2a_{m-4}\quad (k=3)$$

и вообще, если уже доказано (3), то

$$a_m=(a_{m-k-1}+a_{m-k-2})a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k=$$
$$=a_{m-k-1}(a_{k+1}+a_k)+a_{m-k-2}a_{k+1}=$$
$$=a_{m-k-1}a_{k+2}+a_{m-k-2}a_{k+1}$$

— это то же равенство (3), где вместо k стоит $k+1$. Таким образом, (3) доказывается индукцией по k.

Заметим еще, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты (это также легко доказывается по индукции).

Теперь проверим (1): при $m\geqslant k$

$$\text{НОД}(a_m,\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k}a_{k+1}+a_{m-k-1}a_k,\ a_k)=$$
$$=\text{НОД}(a_{m-k}a_{k+1},\ a_k)=\text{НОД}(a_{m-k},\ a_k).$$

Отметим, что утверждение задачи б) известно как «теорема Лукача» (1876 г.).

Н. Б. Васильев, В. Ф. Лев

Ф1128. *На горизонтальной поверхности покоится однородный тонкий обруч массой M и радиусом R. Горизонтальный диаметр обруча представляет собой легкую гладкую трубку, в которую помещен шарик массой m, прикрепленный к обручу двумя пружинами жесткостью k каждая (рис. 1). Удерживая обруч неподвижным, шарик отклонили влево на величину x, после чего предоставили систему самой себе. Найти ускорение центра обруча в начальный момент времени. Проскальзывание обруча отсутствует.*

На рисунке 2 показаны силы, действующие на шарик и на обруч.

Пусть ускорение центра обруча равно a. Тогда уравнение, выражающее второй закон Ньютона для поступательного движения обруча (в проекциях на горизонтальное направление), будет иметь вид:

$$Ma=2kx-F_{\text{тр}}.$$

Здесь $2kx$ — суммарная сила упругости обеих пружин, $F_{\text{тр}}$ — сила трения со стороны горизонтальной поверхности.

Если ускорение центра обруча равно a, то вертикальное ускорение шарика будет равно ax/R, и уравнение движения шарика (в проекциях на вертикальное направление) запишется в виде:

$$ma\,\frac{x}{R}=mg-N.$$

Здесь N — сила реакции со стороны гладкой трубки.

Наконец, запишем уравнение, описывающее вращательное движение обруча вокруг его центра:

$$MRa=F_{\text{тр}}R+Nx.$$

Решая систему трех уравнений, получим

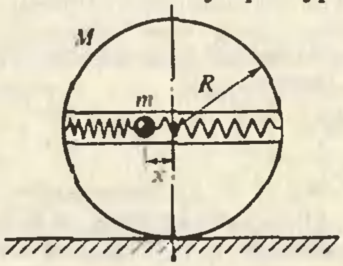


Рис. 1

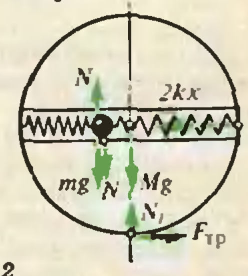


Рис. 2

$$a=\frac{(mg+2kR)xR}{2MR^2+mx^2}.$$

С. С. Кротов

Ф1129. *На цилиндрический постоянный магнит вблизи его полюса надета катушка, имеющая вид узкого кольца (рис. 1). Если трясти катушку так, чтобы она совершала гармонические колебания вдоль оси OO′ с амплитудой A=1 мм (которая много меньше размеров магнита и катушки) и частотой f=1000 Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой $\mathcal{E}_0=5$ В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток I=200 мА?*

Рис. 1.

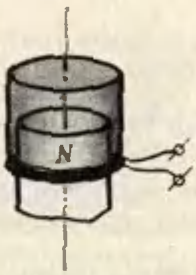


Рис. 2.

При смещении катушки вдоль оси магнита меняется поток магнитной индукции через катушку. В результате в ней возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=N\Delta\Phi/\Delta t$, где N — число витков катушки, Φ — поток магнитной индукции через один виток.

Для вычисления Φ поступим следующим образом. Натянем на виток какую-либо поверхность и подсчитаем число *линий* индукции магнитного поля $\vec{B}$, пересекающих эту поверхность. В данном случае удобно использовать поверхность в виде цилиндра с крышкой (рис. 2). При этом будем иметь в виду, что при смещении катушки крышка остается на месте, но меняется расстояние между ней и катушкой. Пусть катушка сместилась вниз на Δx. Тогда к боковой поверхности цилиндра добавляется «поясок» с площадью $2\pi R\Delta x$, где R — радиус катушки. Соответственно к Φ добавляется $\Delta\Phi$ — магнитный поток через этот «поясок»:

$$\Delta\Phi=2\pi R\Delta x\cdot B_r,$$

где B_r — *радиальная* (т. е. перпендикулярная боковой поверхности цилиндра) проекция вектора $\vec{B}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}=N\cdot 2\pi R\frac{\Delta x}{\Delta t}B_r=N\cdot 2\pi RvB_r,$$

где v — скорость катушки. При гармонических колебаниях амплитуда скорости

$$v_0=\omega x_0=2\pi fA,$$

и

$$\mathcal{E}_0=N\cdot 2\pi R\cdot 2\pi fAB_r.$$

С другой стороны, искомая сила равна

$$F=\Sigma\Delta F=\Sigma N\cdot I\Delta l\cdot B_r=N\cdot 2\pi RIB_r.$$

Из последних двух равенств окончательно получаем

$$F=\frac{\mathcal{E}_0 I}{2\pi fA}\approx 0{,}16\ \text{Н}.$$

М. М. Цыпин

Ф1130. *Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью C, расстояние между пластинами которого d, и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна ω_0. Какой будет собственная*

Запишем энергию системы в произвольный момент времени:

$$W=\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-\frac{qUx}{d},$$

где L — индуктивность катушки, I — ток в катушке, U — напряжение на конденсаторе, v — скорость частицы, x — ее координата. Уравнение движения частицы в электрическом поле конденсатора имеет вид:

частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой m, имеющую заряд q? Сила тяжести отсутствует. Краевыми эффектами и силой «электростатического изображения» пренебречь.

$$ma=\frac{qU}{d}.$$

Если U изменяется по гармоническому закону $U=$

$$=U_0\cos\omega t, \text{ то}$$
$$v=(qU_0/(md\omega))\sin\omega t,$$
$$x=-(qU_0/(md\omega^2))\cos\omega t,$$
$$I=-CU_0\omega\sin\omega t.$$

По закону сохранения энергии

$$W=U_0^2\left(\frac{L}{2}(C\omega)^2+\frac{m}{2}\left(\frac{q}{m\omega d}\right)^2\right)\sin^2\omega t+$$
$$+U_0^2\left(\frac{C}{2}+\frac{q^2}{m(\omega d)^2}\right)\cos^2\omega t=\text{const}.$$

Это возможно, только если коэффициенты при $\cos^2\omega t$ и $\sin^2\omega t$ равны. Отсюда получаем

$$\omega^2=\omega_0^2/2+((\omega_0^2/2))^2+(q\omega_0/d)^2/(mC))^{1/2}. \qquad (*)$$

Оценим, при каких условиях можно пренебречь силой «электростатического изображения»*) (как это было сделано выше). Эта сила, равная по порядку величины $q^2x/(\varepsilon_0 d^3)$, должна быть намного меньше «обычной» электростатической силы qU/d, откуда

$$\frac{q^2}{\varepsilon_0 d^3 m\omega^2}\ll 1.$$

Поскольку площадь пластин конденсатора $S\gg d^2$, а $C=$ $=\varepsilon_0 S/d$, формула (*) справедлива, если введение частицы в конденсатор не сильно изменяет частоту колебаний в контуре.

А. В. Андрианов, Д. А. Купцов

Ф1131. *Определить скорость ветра в смерче обычными метеорологическими приборами трудно (поскольку смерч невелик по размеру и движется) и небезопасно. Предложено измерять ее издали с помощью портативного радара (так как внутри смерча много пыли и мелких предметов, он отражает радиоволны). Радар излучает радиоволны на частоте $f_0=10^{10}$ Гц. Спектр отраженного от смерча сигнала приведен на рисунке ($\Delta f=f-f_0$). Найти максимальную скорость ветра в смерче.*

Частота отраженного сигнала отличается от частоты излучателя из-за эффекта Доплера. Максимальный сдвиг частот будет в том случае, если скорость отражающего радиоволны предмета направлена точно на радар (или от него).

Будем считать, что радар посылает короткие радиоимпульсы с частотой следования f_0, а частота принимаемых им импульсов равна f_1. Время между приходами в антенну радара n-го и $(n+1)$-го импульсов равно

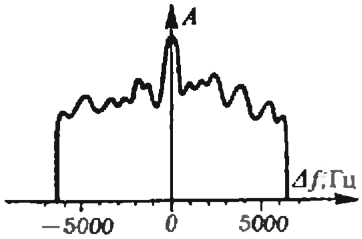
$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f_0}+T_{n+1}-T_n,$$

где T_n — время распространения n-го импульса от радара до отражающего предмета и обратно, T_{n+1} — время распространения $(n+1)$-го импульса.

Обозначим через L_n расстояние от радара до отражающего предмета в момент испускания n-го импульса, а через L_{n+1} — то же расстояние в момент испускания $(n+1)$-го импульса. Очевидно, что

$$T_n=\frac{2L_n}{v+c},\ T_{n+1}=\frac{2L_{n+1}}{v+c},$$

*) О том, как можно определить эту силу для некоторых конкретных случаев, можно прочитать в заметке «Метод электростатических изображений» («Квант», 1987, № 3, с. 39). (*Примеч. ред.*)



где v — искомая скорость ветра в смерче, c — скорость распространения радиоволн (скорость света). Разность $L_n - L_{n+1}$ равна смещению отражающего предмета за время, равное $1/f_0$:

$$L_n - L_{n+1} = \frac{v}{f_0}.$$

Отсюда получаем

$$f_1 = f_0 \frac{(c+v)}{(c-v)} \approx f_0\left(1 + \frac{2v}{c}\right),$$

и

$$v \approx \frac{c}{2}\,\frac{\Delta f}{f_0} \approx 100 \text{ м/с}.$$

Д. А. Купцов

Ф1132. *Недавно установлено, что вымирание видов животных на Земле идет особенно интенсивно в течение периодически повторяющихся промежутков времени длительностью $T = 6{,}2$ млн лет. Такая закономерность объясняется гипотезой, предполагающей существование звезды Немезиды, являющейся спутником Солнца. Эта слабая и потому невидимая звезда движется по орбите, половина которой расположена внутри так называемого «пояса Оорта», содержащего запас комет (рис. 1). Возмущая движение комет, Немезида вызывает на Земле «кометный дождь», продолжительность которого практически совпадает со временем пребывания Немезиды внутри пояса Оорта.*
Определите большую полуось a орбиты Немезиды и период ее обращения вокруг Солнца, если предполагается, что перигелий орбиты находится на расстоянии $0{,}15a$ от Солнца. Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — полуоси эллипса.

За время $T = 6{,}2$ млн лет радиус-вектор Немезиды занимает площадь, заштрихованную на рисунке 2. Это половина площади эллипса за вычетом площади треугольника с основанием $2b$ и высотой $0{,}85\ a$. Площадь этой фигуры, как нетрудно сосчитать, составляет $(\pi ab/2 - 0{,}85ab)/\pi ab = 0{,}23$ площади всего эллипса. Такую же часть периода составляет время пребывания Немезиды внутри пояса Оорта (это следует из второго закона Кеплера). Полный период обращения Немезиды вокруг Солнца, следовательно, составит $T_x = 27$ млн лет.

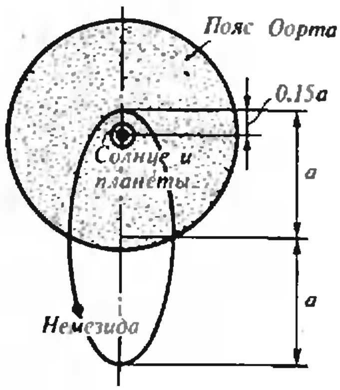


Рис. 1.

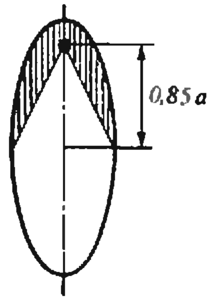


Рис. 2.

Сравнивая, с помощью третьего закона Кеплера, движение Земли и Немезиды, получаем большую полуось орбиты невидимого спутника Солнца:

$$a = (T_x/T_0)^{2/3} R_0 = (27 \cdot 10^6)^{2/3} \text{а.е.} = 9 \cdot 10^4 \text{а.е.} \approx$$
$$\approx 13{,}5 \cdot 10^{12} \text{км}.$$

Здесь T_0 — земной год, а R_0 — радиус орбиты Земли, равный одной астрономической единице (1 а. е.), или 150 млн км.

В. Е. Белонучкин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1091—М1115, Ф1103—Ф1117, справились с задачами М1091, М1093, М1094, М1096, М1097, М1101, М1102, М1105, Ф1104, Ф1106, Ф1109—Ф1111, Ф1114—Ф1116. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Агаджанов (п. Ермолино Калужской обл.) 04; *Н. Андрианов* (Электросталь) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Акимов* (Евпатория) 98, 04; *А. Акопян* (Ереван) 04; *Ш. Алексанян* (Ленинакан) 04; *И. Аржанцев* (Киев) 92, 98, 04; *В. Барановский* (Омск) 92, 98, 03, 04; *С. Башмаков* (Севастополь) 04; *Н. Билусяк* (с. Менява Ивано-Франковской обл.) 98; *А. Богданов* (Старый Оскол) 92, 03, 04; *П. Бородин* (Киров) 98; *Я. Бренер* (Сергеевка) 04; *С. Бунда* (Ужгород) 04; *С. Бутвина* (Житомир) 92, 95, 98, 03, 04; *Ю. Вавулов* (Сафоново) 04; *В. Ванчурин* (Москва) 04; *Ц. Васильев* (София, НРБ) 04; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 04; *С. Волошин* (Подгородное) 04; *К. Волченко* (Донецк) 03; *М. Всемирнов* (Ленинград) 92; *М. Выборнов* (Киев) 92; *Е. Габрилович* (Минск) 98; *Ю. Гольд* (Одесса) 04; *П. Григорьев* (Рига) 92; *Ю. Гринфельд* (Москва) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Гурман* (Одесса) 04; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 04; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 98; *Д. Долгопят* (Реутов) 92; *В. Дробовцев* (Москва) 92; *Б. Дубров* (Минск) 92, 98, 03, 04; *Е. Дуда* (Харьков) 92; *А. Ефимчук* (Минск) 03, 04; *В. Жилинскайте* (Вильнюс) 92, 98—00; *И. Зеленко* (Саратов) 03, 04; *С. Зелик* (Краматорск) 92, 98, 04; *И. Зук* (Эссен, ФРГ) 00, 04; *В. Ивлев* (Джезказган) 92; *М. Игнатьев* (Москва) 04; *С. Измалков* (Харьков) 04; *А. Имашова* (Ленинград) 98; *И. Иоппе* (Москва) 92, 98, 00; *Д. Кабыш* (Москва) 98; *Е. Казарян* (Тбилиси) 92; *В. Калошин* (Харьков) 92, 95, 98, 00; *Л. Каминштейн* (Киев) 92, 03, 04; *Д. Камушадзе* (Тбилиси) 04; *Н. Капуткина* (Москва) 92, 98, 03; *С. Касаманян* (Октемберянский р-н АрмССР) 92; *К. Касимов* (Целиноград) 04; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 04; *С. Коваценко* (Винница) 92, 98, 03, 04; *О. Коврижкин* (Майкоп) 92; *Д. Кожевников* (Онутинск) 92; *А. Козачко* (Винница) 92, 98, 03, 04; *И. Кокоев* (Тбилиси) 04; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 04; *М. Колодей* (Омск) 92, 98, 04; *В. Колошин* (Харьков) 03, 04; *П. Кононенко* (Иваново) 92; *Д. Коржнев* (Киев) 04; *Д. Коровин* (Иваново) 03, 04; *А. Короткий* (Днепродзержинск) 04; *А. Коршков* (Мозырь) 92, 98, 03, 04; *Г. Кронин* (Ленинград) 98, 04; *А. Крючков* (Саратов) 98, 04; *Т. Куликова* (Звенигород) 92, 95, 98, 03, 04; *Н. Лапуста* (Тернополь) 04; *В. Левшин* (Москва) 98; *С. Лесик* (Донецк) 92, 95, 98, 03, 04; *Ю. Литвинова* (Киев) 98; *М. Лоба* (Львов) 04; *Е. Ломовцева* (Белорецк) 92; *Г. Маглаперидзе* (Рустави) 04; *А. Малый* (Чебоксары) 92, 03, 04; *В. Мамедов* (п. Борадыгях Аз.ССР) 98; *И. Марков* (Киев) 92, 04; *В. Марченко* (Минск) 04; *Т. Медведева* (Саратов) 04; *А. Мельник* (Гайворон) 04; *А. Мельниченко* (Гомель) 04; *Д. Менагаришвили* (Тбилиси) 92; *А. Морозова* (Одесса) 92,04; *Р. Мучник* (Винница) 92, 98, 04; *О. Наумов* (Заволжье) 04; *Э. Новрузов* (Баку) 04; *И. Опульский* (Киев) 92, 98; *Л. Осовский* (Тольятти) 98, 04; *В. Острик* (Жданов) 92, 03; *С. Острик* (п. Черноголовка Московской обл.) 98; *С. Печеный* (Гайворон) 92, 98; *А. Пилипенко* (Киев) 92, 98; *М. Пискарев* (Баку) 04; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) 92, 98, 04; *А. Подобряев* (Волгоград) 04; *И. Поляк* (Ленинград) 92, 03; *С. Постников* (Ковров) 04; *В. Рагулин* (Москва) 92, 98, 03, 04; *В. Раймундас* (Друскининкай) 04; *А. Рыжков* (Минск) 98, 03, 04; *Н. Рябова* (Харьков) 04; *К. Саввиди* (Ереван) 92; *Р. Садреев* (Алма-Ата) 92; *А. Серебряков* (Москва) 92, 98, 00, 03, 04; *А. Скопенков* (Саратов) 03, 04; *В. Соботович* (Киев) 04; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 92, 98; *Г. Тер-Сааков* (Баку) 92, 03, 04; *С. Тер-Сааков* (Баку) 92, 03, 04; *С. Тихонов* (Воронеж) 92, 98, 00, 03, 04; *С. Трухан* (Петропавловск-Камчатский) 98; *Д. Турсунов* (Караганда) 92, 04; *К. Ушаков* (Киев) 04; *А. Федотов* (Красноярск) 03, 04; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 92, 98, 00, 04; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) 92, 04; *М. Хасидовский* (Ташкент) 92, 98, 03, 04; *Ж. Хужамов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 04; *А. Циккер* (Ташкент) 98, 04; *Н. Черепанова* (Целиноград) 04; *Д. Черепнин* (Винница) 04; *М. Чернин* (Курск) 92, 04; *И. Чижиков* (Винница) 92, 98, 04; *С. Чуркин* (Чернигов) 92, 04; *А. Шаповал* (Киев) 03, 04; *М. Шарапов* (Киев) 04; *А. Шиндлер* (Феодосия) 03; *В. Штотланд* (Курск) 92, 03, 04; *А. Эгамов* (Гороховец) 92, 98, 03, 04.

Физика

С. Аввакумов (Новосибирск) 17; *С. Авдеенко* (Краматорск) 07; *Р. Акчурин* (Тамбов) 03—05, 13; *А. Бабкин* (Киев) 03—07, 13; *А. Башкатов* (Новополоцк) 05—07, 13—17; *В. Белоног* (Старый Оскол) 03, 05; *А. Бережной* (Воронеж) 03—07; *Д. Бережной* (Запорожье) 03, 05; *В. Берестецкий* (Винница) 13; *В. Бескровный* (Донецк) 05—07; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) 07; *Е. Бляшкин* (Пятигорск) 03; *В. Бобров* (Железногорск) 13; *С. Бобровник* (Черновцы) 03—07, 13, 17; *П. Болотских* (Губкин) 05, 17; *А. Бучель* (Луцк) 03—05,13; *Э. Бязрова* (Тбилиси) 03—05,13; *В. Высоцкий* (Киев) 12—17; *Е. Габрилович* (Минск) 03; *В. Гавенский* (Баку) 05,13; *О. Глазунов* (Москва) 13; *И. Гляненко* (Грозный) 03—05,17; *В. Головко* (Старый Оскол) 05; *В. Горбовец* (Свердловск) 05; *И. Горбунов* (Саратов) 05; *В. Городенчук* (Житомир) 03,05; *Ю. Гринфельд* (Москва) 03,13; *В. Гундарь* (Свердловск) 05—07; *В. Гусятников* (Москва) 03; *Д. Далидович* (Москва) 03,17; *П. Девянин* (Москва) 13; *Б. Дейч* (Харьков) 03—07; *Н. Демчук* (Здолбунов) 03—05,13,17; *К. Демьяненко* (Киев) 13—17; *А. Денисов* (Ижевск) 12; *С. Добровольский*

(Продолжение см. на с. 51)

ДРОБИ — ВЕРБЛЮДЫ — ПАРКЕТЫ

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Нередко бывает, что одна и та же математическая задача естественно возникает в совершенно непохожих ситуациях — от *головоломок* до прикладных расчетов. Об одной из таких задач сегодня и пойдет речь.

Арифметическая задача

Найти все четверки натуральных чисел (p, q, r, s), *для которых справедливо равенство*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

Будем считать, что $p \leqslant q \leqslant r \leqslant s$. Тогда самое меньшее число — p — не больше 4 $\left(\text{иначе } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<1\right)$ и, конечно, не меньше 2. Следовательно, надо рассмотреть три случая: $p=2$, $p=3$, $p=4$.

Пусть $p=2$. Тогда $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$. Снова оценим самое меньшее число — q. Оно не может быть больше 6 $\left(\text{иначе } \frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<\frac{1}{2}\right)$ и должно быть не меньше 3.

Теперь в равенство $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$ подставим четыре возможных значения q: $q=3$, $q=4$, $q=5$, $q=6$ — и оценим r. Затем рассмотрим все возможные значения r и найдем s.

Точно так же можно поступить и в двух других случаях: $p=3$ и $p=4$.

Читатель, самостоятельно перебрав все возможности, убедится в том, что существуют 14 различных четверок (p, q, r, s). Вот они:

(2,3,7,42),	(2,4,5,20),	(3,3,4,12),
(2,3,8,24),	(2,4,6,12),	(3,3,6,6),
(2,3,9,18),	(2,4,8,8),	(3,4,4,6),
(2,3,10,15),	(2,5,5,10),	(4,4,4,4).
(2,3,12,12),	(2,6,6,6),	

Чудесным образом этот результат (и некоторые близкие результаты, в частности решение в натуральных числах уравнения с тремя неизвестными $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$) имеет отношение к самым разным задачам. Мы расскажем о двух.

Забавная история

С давних времен известна история о разделе наследства.

Некий человек оставил в наследство трем своим сыновьям 17 верблюдов. Старшему сыну он завещал половину наследства, среднему — третью часть, а самому младшему — девятую.

Чтобы справедливо разделить наследство, сыновья обратились к судье, известному своей мудростью.

Судья поступил неожиданным образом. Он добавил к 17 верблюдам еще одного — своего верблюда. Из 18 верблюдов половину — 9 верблюдов — отдал старшему, третью часть — 6 верблюдов — отдал среднему и девятую часть — 2 верблюда — отдал младшему. Итого он раздал 9+6+2=17 верблюдов, а своего забрал назад.

Все наследники остались довольны, так как каждому из них причиталось меньше, а именно: $\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$, $\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$, $\frac{17}{9}=1\frac{8}{9}$ *верблюдов соответственно.*

Объяснить этот парадокс нетрудно: либо отец не был силен в арифметике, либо он имел в виду еще когонибудь — ведь он завещал сыновьям не все наследство. Это легко увидеть, если сложить причитающиеся сыновьям доли: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$. Отсюда также ясно, почему 18 верблюдов «решили вопрос» — это наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 9. Судья разделил все наследство в пропорции $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$, так как претендентов больше не было.

Посмотрим, не могли ли в этой истории числа быть другими. Пусть $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ $(p\leqslant q\leqslant r)$ — завещанные доли наследства и пусть в стаде $s-1$ верблюдов. Судья добавляет одного верблюда и получается s верблюдов. Число s должно нацело делиться на числа p, q, r, и частные, полученные при этом делении, должны в сумме давать $s-1$ верблюдов (чтобы судья мог забрать своего верблюда назад). Запишем эти условия в виде равенства

$$\frac{s}{p}+\frac{s}{q}+\frac{s}{r}=s-1.$$

Это равенство можно переписать так:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

Все такие четверки (p, q, r, s) мы уже знаем, надо только отобрать среди них те, в которых s делится на p, q, r. Из возможных 14 четверок этим свойством обладают 12, вот они:

(2,3,7,42),	(2,4,5,20),	(2,6,6,6),
(2,3,8,24),	(2,4,6,12),	(3,3,4,12)
(2,3,9,18),	(2,4,8,8),	(3,3,6,6),
(2,3,12,12),	(2,5,5,10),	(4,4,4,4).

В классической истории использована четверка (2,3,9,18): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$. А если, скажем, для такой истории выбрать первую четверку, то мы получим, что в стаде 41 верблюд, а доли братьев должны

Рис. 1.

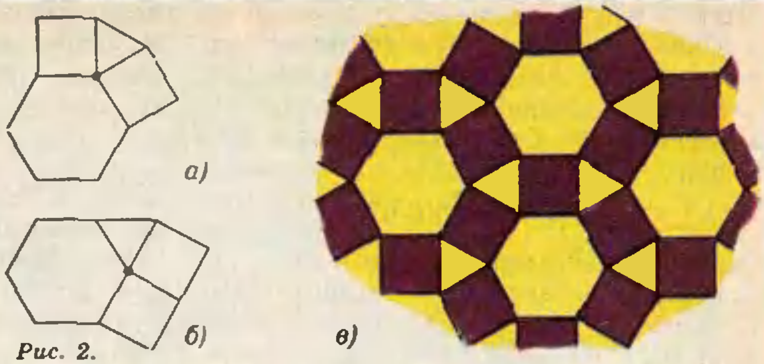


Рис. 2.

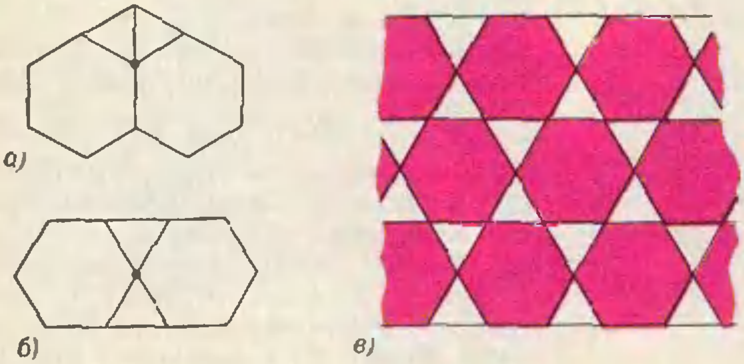


Рис. 3.

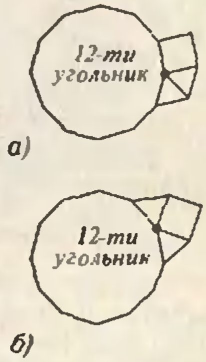


Рис. 4.

быть равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ соответственно*). Судья добавляет одного своего верблюда (получается 42) и отдает братьям соответственно 21, 14, 6 верблюдов (всего 41), а своего верблюда забирает назад.

Практическая задача

Самый простой из «правильных» паркетов — это разбиение плоскости на квадраты (рис. 1). Интересно выяснить, сколько есть еще таких паркетов: к каждой вершине паркета примыкают четыре правильных многоугольника и все вершины устроены одинаково (последнее означает, что паркет можно сдвинуть так, что любая его заданная вершина перейдет в любую другую заданную вершину и все линии совпадут). Это — вполне практическая задача.

Мы знаем, что сумма углов правильного n-угольника равна $180°(n-2)$, а его один угол равен

$$\frac{180°(n-2)}{n} = 180° - \frac{360°}{n}.$$

Пусть в вершине паркета сходятся углы четырех правильных многоугольников: p-угольника, q-угольника, r-угольника и s-угольника. Сумма этих четырех углов должна равняться 360°. Запишем это условие:

$$180° - \frac{360°}{p} + 180° - \frac{360°}{q} + 180° - \frac{360°}{r} + 180° - \frac{360°}{s} = 360°.$$

Легко понять, что это равенство приводит к знакомому нам соотношению

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

*) Первая четверка среди всех других выделяется тем, что содержит наибольшее число — 42, причем $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Среди троек чисел, сумма обратных которым равна 1, таким же свойством обладает начало нашей четверки: (2, 3, 7). Оказывается, что среди пятерок такой будет (2, 3, 7, 43, 1806), где $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$; среди шестерок — (2, 3, 7, 43, 1807, 3263443), и дальше будет так же. Это — очень трудная теорема, которую наши старшие читатели встречали в 7-м номере «Кванта» за 1987 год в статье «Разбиение единицы».

Если считать, что $p \leqslant q \leqslant r \leqslant s$, то все такие четверки мы знаем — их 14 штук. Так как речь идет о многоугольниках, надо отбросить те четверки, где $p=2$. Останутся четыре четверки:

(4,4,4,4), (3,4,4,6), (3,3,6,6), (3,3,4,12).

Первая четверка соответствует паркету из одинаковых квадратов (к каждой вершине примыкают 4 правильных четырехугольника — см. рисунок 1).

Вторая четверка (3,4,4,6) представляет две возможности для устройства вершины (рис. 2, *а*, *б*), но до правильного паркета удается достроить только паркет на рисунке 2, *а* — получается рисунок 2, *в*.

Третьей четверке (3,3,6,6) также соответствуют два расположения многоугольников в вершине (рис. 3, *а*, *б*), и только второй случай, изображенный на рисунке 3, *б*, достраивается до правильного паркета (рис. 3, *в*).

Два рисунка (рис. 4, *а*, *б*), соответствующих четвертой четверке (3,3, 4,12), до правильного паркета не достраиваются.

Таким образом, существует только три правильных паркета, у которых к каждой вершине примыкает четыре правильных многоугольника.

Вообще оказывается, что существует ровно 11 разных правильных паркетов, причем число многоугольников, сходящихся в одной вершине, может равняться 3, 4 и 6. В «Кванте» про это рассказывалось, правда, очень давно, в статье О. Михайлова «Одиннадцать правильных паркетов» (см. «Квант», 1979, № 2).

Громоотвод, политика и... шляпки

(Начало см. на с. 13)

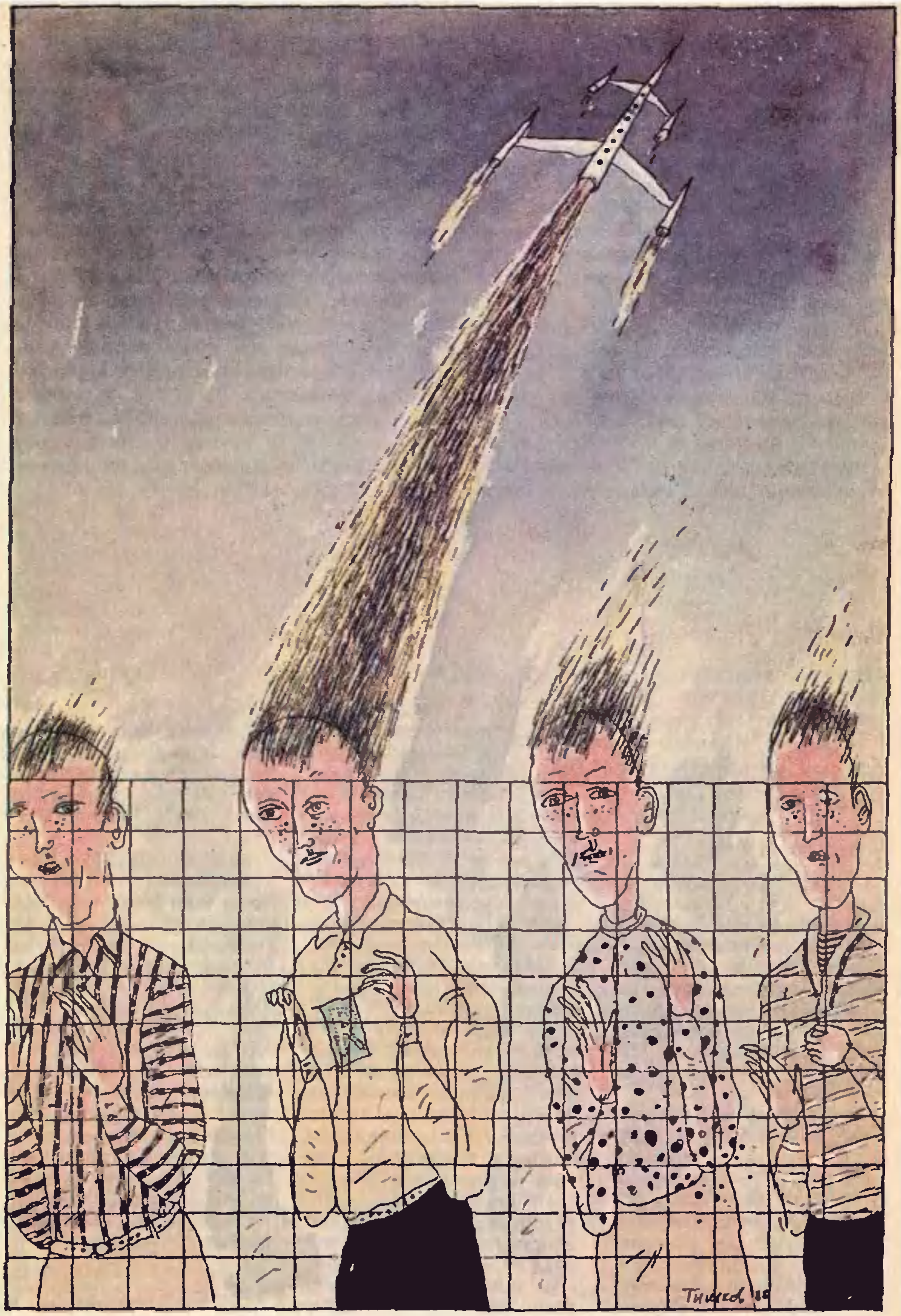
Чешский священник Прокоп Дивиш по праву носил неофициальный титул «волшебник электричества» (magus electricus). В 1754 году он построил первый в Европе молниеотвод, изобретенный им независимо от Франклина. Но перенесемся на несколько лет назад.

В 1750 году венский профессор Иозеф Франц решил показать Дивишу свои электрические опыты. У Франца был типичный для того времени генератор статического электричества — вращаемый стеклянный шар с подвешенным на шелковых шнурах кондуктором (отводом) в виде металлической трубки или прута. Чтобы провести любой электрический опыт, нужно было вращать стеклянный шар, который при этом электризовался трением и сообщал заряд кондуктору.

Дивиш прибыл к Францу в парике, как того требовала мода. Но парик был с секретом: весь утыкан обрезками проволоки. Уже давно было известно, что металлическое острие «отнимает электричество» (это — одно из явлений, на которых основано действие молниеотвода). Наклоняя голову к кондуктору, Дивиш отводил тем самым электрический заряд. Вероятно, Дивиш испытывал неприятные ощущения, отводя заряд в землю через свое тело, но чего не стерпишь ради хорошей шутки! Франц был обескуражен: он никак не мог получить заряд на кондукторе. Ему так и не удалось удивить «мага электричества».

Если бы Дивиш провел заземление от обрезков проволоки (скрытым образом, разумеется), он был бы избавлен от неприятных ощущений. Идея такого рода возникла во второй половине XVIII века. Речь идет о шляпе-молниеотводе. На рисунке (см. 2-ю страницу обложки) изображены парижские модницы с персональной грозозащитой в виде серебряной цепочки, спускающейся до пят с металлического стержня, укрепленного на шляпе. В XVIII веке это не было шуткой.

Л. Н. Крыжановский



Рассказ замечательного американского писателя-фантаста адресован прежде всего тем, для кого космические полеты — главная мечта жизни, а любимая картина — вид звездного неба. Одним словом, всем тем, для кого «Р — значит ракета».
Именно так будет называться новый раздел нашего журнала. В нем мы будем публиковать различные материалы, посвященные освоению и исследованию космического пространства, работе Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества.

Р — ЗНАЧИТ РАКЕТА

Р. БРЭДБЕРИ

Эта ограда, к которой мы приникали лицом, и чувствовали, как ветер становится жарким, и еще сильней прижимались к ней, забывая, кто мы и откуда мы, мечтая только о том, кем мы могли бы быть и куда попасть...

Но ведь мы были мальчишки — и нам нравилось быть мальчишками; и мы жили в небольшом флоридском городе — и город нам нравился; и мы ходили в школу — и школа нам безусловно нравилась; и мы лазали по деревьям и играли в футбол, и наши мамы и папы нам тоже нравились...

И все-таки иногда — каждую неделю, каждый день, каждый час в ту минуту или секунду, когда думали о пламени, и звездах, и об ограде, за которой они нас ожидали,— иногда ракеты нравились нам больше.

Ограды. Ракеты.

Каждую субботу утром...

Ребята собирались возле моего дома. Солнце едва взошло, а они уже стоят, голосят, пока соседи не выставят из форточек пистолеты-парализаторы — дескать, сейчас же замолчите, не то заморозим на часок, тогда на себя пеняйте!

— А, влезь на ракету, сунь голову в кюзу! — кричали ребята в ответ. Кричали, надежно укрывшись за нашей изгородью: ведь старик Уикард из соседнего дома стреляет без промаха.

В это прохладное, мглистое субботнее утро я лежал в постели, думая о том, как накануне провалил контрольную по семантике, когда снизу донеслись голоса ватаги. Еще и семи не было, и ветер нес с Атлантики густой туман, и расставленные на всех углах вибраторы службы погоды только что начали жужжать, разгоняя своими лучами эту кашу: слышно было, как они нежно и приятно подвывают.

Я дотащился до окна и выглянул наружу.

— Ладно, пираты космоса! Глуши моторы!

— Эгей! — крикнул Ральф Прайори.— Мы только что узнали: расписание запусков изменили! Лунная, с новым мотором «Икс-Л-3», стартует через *час*!

— Будда, Мухаммед, Аллах и прочие реальные и полумифические деятели! — молвил я и отскочил от окна с такой прытью, что ребята от толчка повалились на траву.

Я мигом натянул джемпер, живо надел башмаки, сунул в задний карман питательные капсулы — сегодня нам будет не до еды, глотай пилюли, как в животе заворчит,— и на вакуумном лифте ухнул со второго этажа вниз, на первый.

На газоне ребята, вся пятерка, кусали губы и подпрыгивали от нетерпения, строили сердитые рожи.

— Кто последним добежит до монорельсовой,— крикнул я, проносясь мимо них со скоростью 5 тысяч миль в час,— тот будет жукоглазым марсианином!

Сидя в кабине монорельсовой, со свистом уносившей нас на Космодром за двадцать миль от города — каких-нибудь несколько минут езды,— я чувствовал, как у меня словно жуки копошатся под ложечкой. Пятнадцатилетнему мальчишке подавай одни только большие запуски. Чуть не каждую неделю по расписанию приходили и уходили малые межконтинентальные грузовые ракеты, но этот запуск... Совсем другое дело — сила, мощь... Луна и дальше...

— Голова кружится,— сказал Прайори и стукнул меня по руке.

Я дал ему сдачи.

— У меня тоже. Ну, скажи, есть в неделе день лучше субботы?

Мы обменялись широкими понимающими улыбками. Мысленно мы проходили все ступени предстартовой готовности. Другие пираты были правильные парни. Сид Россен, Мак Лесли, Ирл Марни — они тоже, как все ребята, прыгали, бегали и тоже любили ракеты, но почему-то мне думалось, что вряд ли они будут делать то, что в один прекрасный день сделаем мы с Ральфом. Мы с Ральфом мечтали о звездах; они для нас были желаннее, чем горсть бело-голубых брильянтов чистейшей воды.

Мы горланили вместе с горланами, смеялись вместе со смехачами, а в душе у нас обоих было тихо; и вот уже бочковатая кабина, шурша, остановилась, мы выскочили и, крича и смеясь, побежали, но побежали спокойно и даже как-то замедленно: Ральф впереди меня, и все показывали рукой в одну сторону, на заветную ограду, и разбирали места вдоль проволоки, поторапливая отставших, но не оглядываясь на них; и наконец все в сборе, и могучая ракета вышла из-под пластикового купола, похожего на огромный межзвездный цирковой шатер, и пошла по блестящим рельсам к точке пуска, провожаемая огромным портальным краном, смахивающим на доисторического крылатого ящера, который вскормил это огненное чудовище, холил и лелеял его, и теперь вот-вот состоится его рождение в раскаленном внезапным сполохом небе.

Я перестал дышать. Даже вдоха не сделал, пока ракета не вышла на бетонный пятачок в сопровождении тягачей-жуков и больших кургузых фургонов с людьми, а кругом, возясь с механизмами, механики-богомолы в асбестовых костюмах что-то стрекотали, гудели, каркали друг другу в незримые для нас и неслышные нам радиофоны, да мы-то в уме, в сердце, в душе все слышали.

— Господи,— вымолвил я наконец.

— Всемогущий, всемилостивый,— подхватил Ральф Прайори, стоя рядом со мной.

Остальные ребята тоже сказали что-то в этом роде.

Да и как тут не восхищаться! Все, о чем людям мечталось веками, разобрали, просеяли и выковали одну — самую заветную, самую чудесную, самую крылатую мечту. Что ни обвод — отвердевшее пламя, безупречная форма... Застывший огонь, готовый к таянью лед ждали там, посреди бетонной прерии; еще немного, и с ревом проснется, и рванется вверх, и боднет эта бездумная, великолепная, могучая голова Млечный Путь, так что звезды посыплются вниз метеоритным огнепадом. А попадется на пути Угольный Мешок — ей-богу, как даст под вздох, сразу в сторону отскочит!

Она и меня поразила прямо под вздох, так стукнула, что я ощутил острый приступ ревности, и зависти, и тоски, как от чего-то незавершенного. И когда наконец через поле пошел окруженный тишиной самоходный вагончик с космонавтами, я был вместе с ними, облаченными в диковинные белые доспехи, в шаровидные гермошлемы и в этакую величественную небрежность — ни дать ни взять магнитофутбольная команда представляется публике перед тренировочной встречей на каком-нибудь местном магнитополе. Но они-то вылетали на Луну — теперь туда каждый месяц уходила ракета,— и у ограды давно уже не собирались толпы зевак, одни мы, мальчишки, болели за благополучный старт и вылет.

— Черт возьми,— произнес я.— Чего бы я ни отдал, только бы полететь с ними. Представляешь себе...

— Я так отдал бы свой годовой проездной билет,— сказал Мак.

— Да... Ничего бы не пожалел.

Нужно ли говорить, какое это было великое событие для нас, ребятишек, словно взвешенных посередине между своей утренней игрой и ожидающим нас вскоре таким мощным и внушительным пополуденным фейерверком.

И вот все приготовления завершены. Заправка ракеты горючим кончилась, и люди побежали от нее в разные стороны, будто муравьи, улепетывающие от металлического идола. И Мечта ожила, и взревела, и метнулась в небо. И вот уже скрылась вместе с утробным воем, и остался от нее только жаркий звон в воздухе, который через землю передался нашим ногам, и вверх по ногам дошел до самого сердца. А там, где она стояла, теперь была черная оплавленная яма да клуб ракетного дыма, будто прибитое к земле кучевое облако.

— Ушла! — крикнул Прайори.

И мы все снова часто задышали, пригвожденные к месту, словно нас оглушили из какого-нибудь чудовищного парапистолета.

— Хочу поскорее вырасти,— ляпнул я.— Хочу поскорее вырасти, чтобы полететь на такой ракете.

Я прикусил губу. Куда мне, зеленому юнцу; к тому же на космические работы по заявлению не принимают. Жди, пока тебя не *отберут*. Отберут.

Наконец кто-то, кажется Сидни, сказал:

— Ладно, теперь айда на телешоу.

Все согласились — все, кроме Прайори и меня. Мы сказали «нет», и ребята ушли, заливаясь хохотом и разговаривая, только мы с Прайори остались смотреть на то место, где недавно стоял космический корабль.

Он отбил нам вкус ко всему остальному, этот старт. Из-за него я в понедельник провалил семантику.

И мне было совершенно наплевать.

В такие минуты я говорил спасибо тому, кто придумал концентраты. Когда у нас вместо желудка ком нервов, меньше всего тянет сесть за стол и расправиться с обедом из трех блюд. Без аппетита несколько таблеток концентрата отлично заменяли и первое, и второе, и третье.

Все дни напролет и до поздней ночи меня неотступно, упорно преследовала одна и та же мысль. Дошло до того, что я каждую ночь должен был прибегать к снотворному массажу в сочетании с тихими мелодиями Чайковского, чтобы хоть ненадолго сомкнуть веки.

— Помилуйте, молодой человек,— сказал в тот понедельник мой учитель,— если это будет продолжаться, придется на следующем заседании психологического комитета снизить вам общую оценку.

— Простите,— ответил я.

Он пристально посмотрел на меня.

— У вас какой-то затор в голове? Очевидно, что-то совсем простое, и притом осознанное.

Я поежился.

— Верно, сэр, осознанное, но никак не простое. А очень даже сложное. Но в общем-то можно сказать одним словом — ракеты...

Он улыбнулся.

— Р — значит ракета, так что ли?

— Вот именно, сэр, что-то вроде этого.

— Но мы не можем допустить, молодой человек, чтобы это отражалось на вашей успеваемости.

— По-вашему, сэр, меня надо подвергнуть гипнотическому внушению?

— Нет-нет.— Учитель перебрал листки, вверху которых большими буквами была написана моя фамилия.

У меня все сжалось под ложечкой. Он опять посмотрел на меня.

— Вы ведь у нас, Кристофер, первый номер в классе, фаворит, так сказать.

Он закрыл глаза, раздумывая.

— Тут надо основательно поразмыслить,— заключил он. Похлопал меня по плечу и добавил: — Ладно, продолжайте заниматься. И не надо горевать.

Он отошел от меня.

Я попробовал сосредоточиться на занятиях, но не мог. До конца уроков учитель все посматривал на меня, листал мой табель и задумчиво покусывал губы. Часов около двух он набрал какой-то номер на своем аудиофоне и минут пять с кем-то разговаривал.

Я не мог расслышать, что он говорил.

Но когда он положил трубку на место, то очень-очень странно поглядел на меня. Зависть, и восторг, и сожаление — все смешалось вместе в этом взгляде. Немножко грусти и много радости. Да, выразительные были глаза.

Я сидел и не знал, смеяться мне или плакать.

В тот же день мы с Ральфом Прайори улизнули пораньше из школы домой. Я рассказал Ральфу, что приключилось, и он насупился: такая у него привычка.

Я встревожился. И мы принялись вместе подстегивать эту тревогу.

— Ты что, Крис, думаешь, тебя куда-нибудь отправят?

Кабина монорельсовой зашипела. Это была наша остановка. Мы вышли. И медленно зашагали к дому.

— Не знаю,— ответил я.

— Это было бы свинство,— сказал Ральф.

— Может быть, мне нужно пойти к психиатру, чтобы он прочистил мне мозги, Ральф? Так ведь тоже нельзя — чтобы учеба кувырком летела.

У моего дома мы остановились и долго глядели на небо. Тут Ральф сказал одну странную вещь:

— Днем нету звезд, а мы их все равно видим, правда ведь, Крис?

— Правда,— сказал я.— Видим.

— Мы будем держаться заодно, идет, Крис? Не могут они, черт бы их взял, убирать тебя сейчас из школы. Мы друзья. Это было бы несправедливо.

Я ничего не ответил, потому что горло мое плотно закупорил ком.

— Что у тебя с глазами? — спросил Прайори.

— А, ничего, слишком долго на солнце глядел. Пошли в дом, Ральф.

Мы ухали под струями воды в душевой, но как-то без особого воодушевления, даже когда пустили ледяную воду.

Пока мы стояли в сушилке, обдуваемые горячим воздухом, я усиленно размышлял. Литература, рассуждал я, полным-полна людей, которые сражаются с суровыми, непримиримыми противниками. Мозг, мышцы — все обращают на борьбу против всяких препон, пока не победят или сами не проиграют. Но ведь у меня-то никаких признаков внешнего конфликта. То, что меня грызет острыми зубами, грызет изнутри, и, кроме меня, только врач-психолог разглядит все мои царапины. Конечно, мне от этого ничуть не легче.

— Ральф,— сказал я, когда мы начали одеваться,— я влип в войну.

— Ты один? — спросил он.

— Я не могу тебя впутывать,— объяснил я.— Потому что это совсем личное дело. Сколько раз мама говорила: «Крис, не ешь так много, у тебя глаза больше желудка»?

— Миллион раз.

— *Два* миллиона. А теперь перефразируем это, Ральф. Скажем иначе: «Не *фантазируй* так много, Крис, твое воображение чересчур велико для твоего тела». Так вот, война идет между воображением и телом, которое не может за ним поспевать.

Прайори сдержанно кивнул.

— Я тебя понял, Кристофер. Понял то, что ты говоришь про личную войну. В этом смысле во мне тоже идет война.

— Знаю,— сказал я.— У других ребят, так мне кажется, это пройдет. Но у нас с тобой, Ральф, по-моему, это никогда не пройдет. По-моему, мы будем ждать все время.

Мы устроились под солнцем на крыше дома, разложили тетрадки и принялись за домашние задания. У Прайори ничего не выходило. У меня тоже. Прайори сказал вслух то, чего я не мог собраться с духом выговорить.

— Крис, Комитет космонавтики *отбирает* людей. Желающие не подают заявлений. Они *ждут*.

— Знаю.

— Ждут с того дня, когда у них впервые замрет сердце при виде Лунной ракеты, ждут годами, из месяца в месяц все надеются, что в одно прекрасное утро спустится с неба голубой вертолет, сядет на газоне у них в саду, из кабины вылезет аккуратный, подтянутый пилот, стремительно поднимется на крыльцо и нажмет кнопку звонка. Этого вертолета ждут, пока не исполнится двадцать один год. А в двадцать первый день рождения выпивают бокал-другой вина и с громким смехом небрежно бросают: дескать, ну и черт с ним, не очень-то и нужно.

Мы посидели молча, взвешивая всю тяжесть его слов. Сидели и молчали. Но вот он снова заговорил:

— Я не хочу так разочаровываться, Крис. Мне пятнадцать лет, как и тебе. Но если мне исполнится двадцать один, а в дверь нашего интерната, где я живу, так и не позвонит космонавт, я...

— Знаю,— сказал я,— знаю. Я разговаривал с такими, которые прождали впустую. Если так случится с нами, Ральф, тогда... тогда мы выпьем вместе, а потом пойдем и наймемся в грузчики на транспортную ракету Европейской линии.

Ральф сжался и побледнел.

— В грузчики...

Кто-то быстро и мягко прошел по крыльцу, и мы увидели мою маму. Я улыбнулся.

— Здорово, леди!

— Здравствуй. Здравствуй, Ральф.

— Здравствуйте, Джен.

Глядя на нее, никто не дал бы ей больше двадцати пяти — двадцати шести лет, хотя она произвела на свет и вырастила меня и уже далеко не первый год служила в Государственном статистическом управлении. Тонкая, изящная, улыбчивая: я представлял себе, как сильно должен был любить ее отец, когда он был жив. Да, у меня хоть мама есть. Бедняга Ральф воспитывался в интернате...

Джен подошла к нам и положила ладонь на лоб Ральфа.

— Что-то ты плохо выглядишь,— сказала она.— Что-нибудь неладно?

Ральф изобразил улыбку.

— Нет-нет, все в порядке.

Джен не нуждалась в подсказке.

— Оставайся ночевать у нас, Прайори,— предложила она.— Нам тебя недостает. Верно ведь, Крис?

— Что за вопрос!

— Мне бы надо вернуться в интернат,— возразил Ральф, правда, не очень убежденно.— Но раз вы просите, да вот и Крису надо помочь с семантикой, так я уж ему помогу.

— Очень великодушно,— сказал я.

— Но сперва у меня есть кое-какие дела. Я быстро туда-обратно на монорельсовой, через час вернусь.

Когда Ральф ушел, мама многозначительно посмотрела на меня, потом ласковым движением пальцев пригладила мне волосы.

— Что-то назревает, Крис.

Мое сердце притихло, ему захотелось помолчать немного. Оно ждало. Я открыл рот, но Джен продолжала:

— Да, где-то что-то назревает. Мне сегодня два раза звонили на работу. Сперва звонил твой учитель. Потом... нет, не могу сказать. *Не хочу* ничего говорить, пока это не произойдет...

Мое сердце заговорило опять, медленно и жарко.

— В таком случае, не говори, Джен. Эти звонки...

Она молча посмотрела на меня. Сжала мою руку мягкими теплыми ладонями.

— Ты еще такой юный, Крис. Совсем-совсем юный.

Я сидел молча.

Ее глаза посветлели.

— Ты никогда не видел своего отца, Крис. Ужасно жалко. Ты ведь знаешь, кем он был?

— Конечно, знаю,— сказал я.— Он работал в химической лаборатории и почти не выходил из подземелья.

— Да, он работал глубоко под землей, Крис,— подтвердила мама. И почему-то добавила: — И никогда не видел звезд.

Мое серце вскрикнуло в груди. Вскрикнуло громко, пронзительно.

— Мама... мама...

Впервые за много лет я вслух назвал ее мамой.

Когда я проснулся на другое утро, комната была залита солнцем, но кушетка, на которой обычно спал Прайори, гостя у нас, была пуста. Я прислушался. Никто не плескался в душевой, и сушилка не гудела. Ральфа не было в доме.

На двери я нашел приколотую записку.

Увидимся днем в школе. Твоя мать попросила меня кое-что сделать для нее. Ей звонили сегодня утром, и она сказала, что ей нужна моя помощь. Привет. Прайори.

Прайори выполняет поручения Джен. Странно. Джен звонили рано утром. Я вернулся к кушетке и сел.

Я все еще сидел, когда снаружи донеслись крики:

— Эгей, Крис! Заспался!

Я выглянул из окна. Несколько ребят из нашей ватаги стояли на газоне.

— Сейчас спущусь!

— Нет, Крис.

Голос мамы. Тихий и с каким-то необычным оттенком. Я повернулся. Она стояла в дверях позади меня, лицо бледное, осунувшееся, словно ее что-то мучило.

— Нет, Крис,— мягко повторила она.— Скажи им, пусть идут без тебя, ты не пойдешь в школу... сегодня.

Ребята внизу, наверно, продолжали шуметь, но я их не слышал. В эту минуту для меня существовали только я и мама, такая тонкая, бледная, напряженная... Далеко-далеко зажужжали, зарокотали вибраторы метеослужбы.

Я медленно обернулся и посмотрел вниз на ребят. Они глядели вверх все трое — губы раздвинуты в небрежной полуулыбке, шершавые пальцы держат тетради по семантике.

— Эгей! — крикнул один из них. Это был Сидни.

— Извини, Сидни. Извините, ребята. Топайте без меня. Я сегодня не смогу пойти в школу. Попозже увидимся, идет?

— Ладно, Крис!

— Что, заболел?

— Нет. Просто... Словом, шагайте без меня. Потом встретимся.

Я стоял, будто оглушенный. Наконец отвернулся от обращенных вверх вопрошающих лиц и глянул на дверь. Мамы не было. Она уже спустилась на первый этаж. Я услышал, как ребята, заметно притихнув, направились к монорельсовой.

Я не стал пользоваться вакуум-лифтом, а медленно пошел вниз по лестнице.

— Джен,— сказал я,— где Ральф?

Джен сделала вид, будто поглощена расчесыванием своих длинных русых волос виброгребенкой.

— Я его услала. Мне нужно было, чтобы он ушел.

— Почему я не пошел в школу, Джен?

— Пожалуйста, Крис, не спрашивай.

Прежде чем я успел сказать что-нибудь еще, я услышал в воздухе какой-то звук. Он пронизал достаточно плотные стены нашего дома и вошел в мою плоть, стремительный и тонкий, как стрела из искрящейся музыки.

Я глотнул. Все мои страхи, колебания, сомнения мгновенно исчезли.

Как только я услышал этот звук, я подумал о Ральфе Прайори. *Эх, Ральф, если бы ты мог сейчас быть здесь.* Я не верил сам себе.

Слушал этот звук, слушал не только ушами, а всем телом, всей душой, и не верил.

Ближе, ближе... Ох, как я боялся, что он начнет удаляться. Но он не удалился. Понизив тон, он стал снижаться возле дома, разбрасывая свет и тени огромными вращающимися лепестками, и я знал, что это вертолет небесного цвета. Гудение прекратилось, и в наступившей тишине мама подалась вперед, выпустила из рук виброгребенку и глубоко вздохнула.

В наступившей тишине я услышал шаги на крыльце. Шаги, которых я так долго ждал.

Шаги, которых боялся никогда не услышать.

Кто-то нажал звонок.

Я *знал* кто.

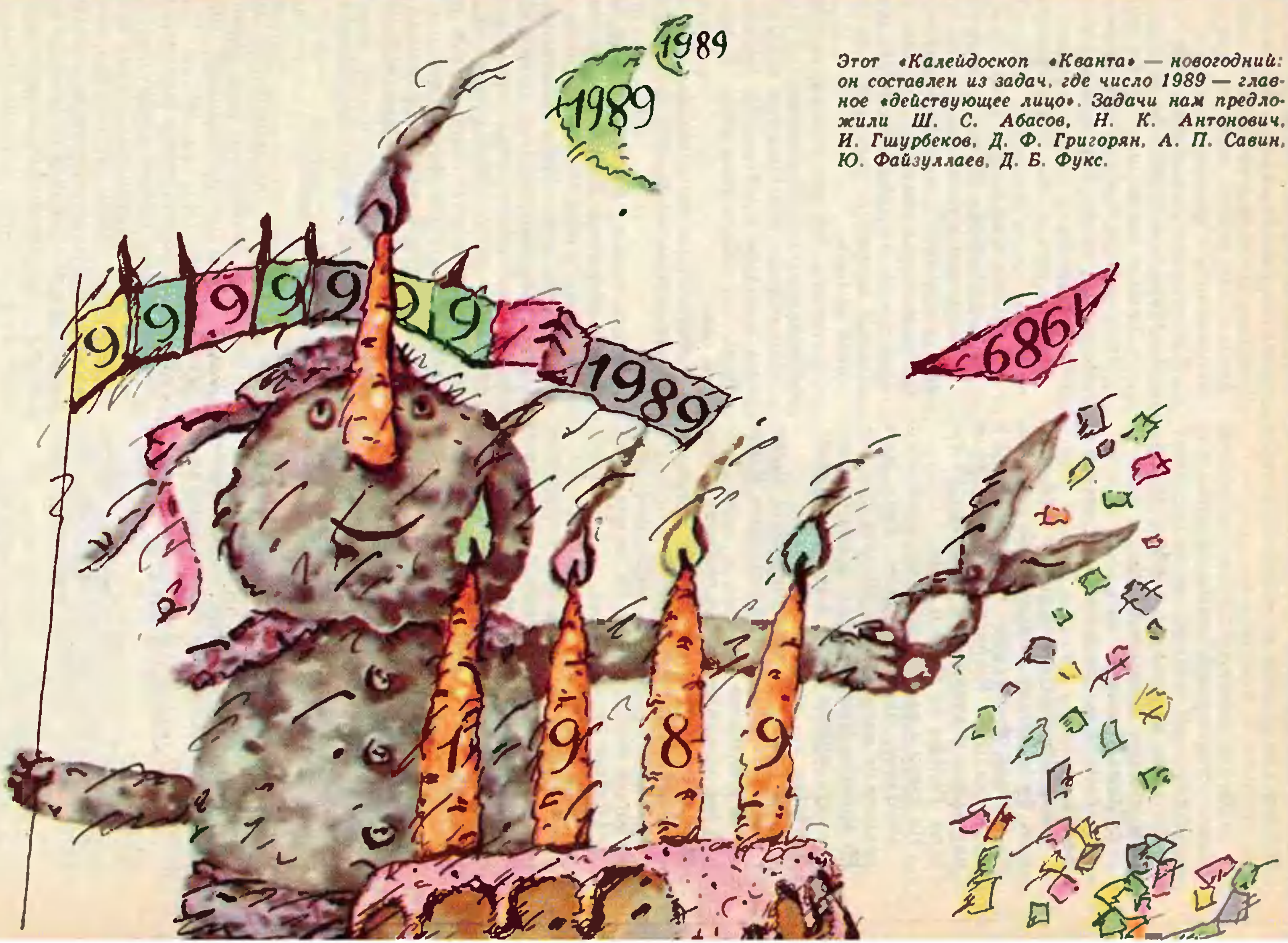
И упорно думал об одном: «Ральф, ну почему тебе непременно надо было уйти теперь, когда это происходит? Почему, черт возьми?»

Глядя на пилота, можно было подумать, что он родился в своей форме. Она сидела на нем как вылитая, как вторая кожа — серебристая кожа: тут голубая полоска, там голубой кружок. Строгая и безупречная, как и надлежит быть форме, и в то же время — олицетворение космической мощи.

(Продолжение см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Этот «Калейдоскоп «Кванта» — новогодний: он составлен из задач, где число 1989 — главное «действующее лицо». Задачи нам предложили Ш. С. Абасов, Н. К. Антонович, И. Гшурбеков, Д. Ф. Григорян, А. П. Савин, Ю. Файзуллаев, Д. Б. Фукс.



1. Может ли сумма $1 + 2 + \ldots + n$ при каком-нибудь n оканчиваться на 1989?

2. Изготовляя конфетти, Вася разрезал лист бумаги на 4 части, некоторые из полученных кусков он снова разрезал на 4 части и т. д. Может ли в некоторый момент оказаться 1989 кусков?

3. Стороны правильного 1989-угольника неограниченно продолжили, в результате чего плоскость разделилась на много частей. Число этих частей больше миллиона или меньше?

4. В 1989 году мне исполняется столько лет, сколько в сумме дают цифры года моего рождения. В каком году я родился?

5. Решите арифметический ребус:

$$\begin{array}{r} XYZT \\ + \quad XYZ \\ XY \\ X \\ \hline 1989 \end{array}.$$

6. Прямоугольный ящик горизонтальными и вертикальными дощечками разделили на 1989 ячеек и в некоторые ячейки положили шарики (возможно, больше одного). Можно ли это сделать так, чтобы в каждом горизонтальном ряду оказалось по 300 шариков, а в каждом вертикальном — по 100 шариков?

7. Семь девяток выписали подряд: 9999999. Поставьте между некоторыми из них знаки плюс или минус так, чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

8. Треугольник разрезали на два многоугольника прямолинейным разрезом, один из полученных многоугольников вновь разрезали на два и т. д. Какое наименьшее количество разрезов следует произвести, чтобы общее количество вершин у полученных многоугольников равнялось 1989?

9. На какую цифру оканчивается число 1989^{1989}?

Р — значит ракета

(Начало см. на с. 34)

Его звали Трент. Он говорил уверенно, с непринужденной гладкостью, без обиняков.

Я стоял молча, а мама сидела в углу с видом растерянной девочки. Я стоял и слушал.

Из всего, что было сказано, мне запомнились лишь какие-то обрывки.

—...отличные отметки, высокий коэффициент умственного развития. Восприятие А-1, любознательность ААА. Необходимая увлеченность, чтобы настойчиво и терпеливо заниматься восемь долгих лет...

— Да, сэр.

—...разговаривали с вашими преподавателями семантики и психологии...

— Да, сэр.

—...и не забудьте, мистер Кристофер...

Мистер Кристофер!

—...и не забудьте, мистер Кристофер, никто не должен знать про то, что вы отобраны Комитетом космонавтики.

— Никто?

— Ваша мать и преподаватели, конечно, знают об этом. Но, кроме них, никто не должен знать. Вы меня хорошо поняли?

— Да, сэр.

Трент сдержанно улыбнулся, упершись в бока своими ручищами.

— Вам хочется спросить — почему так? Почему нельзя поделиться со своими друзьями? Я объясню. Это своего рода психологическая защита. Каждый год мы из миллиардного населения Земли отбираем около десятка тысяч молодых людей. Из них три тысячи через восемь лет выходят из училища космонавтики, с той или другой специальностью. Остальным приходится возвращаться домой. Они отсеялись, но окружающим-то незачем об этом знать. Обычно отсев происходит уже в первом полугодии. Не очень приятно вернуться домой, встретить друзей и доложить им, что самая замечательная работа в мире вам не по зубам. Вот мы и делаем все так, чтобы возвращение проходило безболезненно. Есть и еще одна причина. Тоже психологическая. Мальчишкам так важно быть заправилами, в чем-то превосходить своих товарищей. Строго-настрого запрещая вам рассказывать друзьям, что вы отобраны, мы лишаем вас половины удовольствия. И таким способом проверяем, что для вас главное: мелкое честолюбие или сам космос. Если вы думаете только о том, чтобы выделиться,— скатертью дорога. Если космос ваше призвание, если он для вас *все*,— добро пожаловать.

Он кивнул маме.

— Благодарю вас, миссис Кристофер.

— Сэр,— сказал я.— Один вопрос. У меня есть друг, Ральф Прайори. Он живет в интернате...

Трент кивнул.

— Я, естественно, не могу вам сказать его данные, но он у нас на учете. Это ваш лучший друг? И вы, конечно, хотите, чтобы он был с вами. Я проверю его дело. Воспитывается в интернате, говорите? Это не очень хорошо. Но... мы посмотрим.

— Если можно, прошу вас. Спасибо.

— Явитесь ко мне на Космодром в субботу, в пять часов, мистер Кристофер. До тех пор — никому ни слова.

Он козырнул. И ушел. И взмыл в небо на своем вертолете, и в ту же секунду мама очутилась возле меня.

— О, Крис, Крис...— твердила она, и мы прильнули друг к другу, и шептали что-то, и говорили что-то, и мама говорила, как это важно для нас, особенно для меня, как замечательно, и какая это честь, вроде как в старину, когда человек постился, и давал обет молчания, и ни с кем не разговаривал, только молился и старался стать достойным, и уходил в какой-нибудь монастырь, где-нибудь в глуши, а потом возвращался к людям, и служил образцом, и учил людей добру. Так и теперь, говорила она, заключала она, утверждала она, это тоже своего рода высокий орден, и я стану как бы его частицей, больше не буду принадлежать ей, а буду принадлежать Вселенной, стану всем тем, чем отец мечтал стать, да не смог, не дожил...

— Конечно, конечно,— пробормотал я.— Я постараюсь, честное слово, постараюсь...— Я запнулся.— Джен, а как же... как мы скажем Ральфу? Как нам быть с ним?

— Ты уезжаешь, и все, Крис. Так ему и скажи. Коротко и ясно. Больше ничего ему не говори. Он поймет.

— Но, Джен, *ты*...

Она ласково улыбнулась.

— Да, Крис, мне будет одиноко. Но ведь у меня остается моя работа и остается Ральф.

— Ты хочешь сказать...

— Я заберу его из интерната. Он будет жить здесь, когда ты уедешь. Ведь именно это ты *желал* от меня услышать, Крис, верно?

Я кивнул, внутри у меня все будто онемело.

— Да, я как раз это хотел услышать.

— Он будет хорошим сыном, Крис. *Почти* таким же хорошим, как ты.

— Отличным!

Мы сказали Ральфу Прайори. Сказали, что я, очевидно, уеду учиться в Европу на год и мама хочет, чтобы он поселился у нас, был ей сыном, пока я не вернусь домой. Мы выпалили все это так, будто слова обжигали нам язык. Когда же мы кончили, Ральф сперва пожал мне руку, потом поцеловал маму в щеку и сказал:

— Я буду рад. Я буду очень рад.

Странно, Ральф даже не стал допытываться, почему я все-таки уезжаю, куда именно и когда думаю вернуться. Сказал только:

— А здорово мы вместе играли, верно? — и примолк, словно боялся продолжать разговор.

Это было в пятницу вечером. Прайори, Джен и я ходили на концерт в Зеленый театр в центре нашего общественного комплекса, потом, смеясь, возвратились домой и стали готовиться ко сну.

У меня ничего не было уложено. Прайори вскользь отметил это, но спрашивать, почему, не стал. А дело в том, что на ближайшие восемь лет другие брали на себя заботу о моей личной экипировке. Укладываться незачем.

Позвонил учитель семантики, коротко и ласково пожелал мне, улыбаясь, всего доброго.

Наконец, мы легли, но я целый час не мог уснуть, все думал о том, что это моя последняя ночь вместе с Джен и Ральфом. Последняя ночь.

И я всего лишь пятнадцатилетний мальчишка...

Я уже начал засыпать, когда Прайори в темноте мягко повернулся на своей кушетке лицом в мою сторону и торжественно прошептал:

— Крис?

Пауза.

— Крис, *ты* еще не спишь? — Глухо, будто далекое эхо.

— Не сплю,— ответил я.

— Думаешь?

Пауза.

— Да.

— Ты... ты теперь перестал *ждать*, да, Крис?

Я понимал, что он подразумевает. И не мог ответить.

— Я жутко устал, Ральф,— сказал я.

Он отвернулся, лег на спину и сказал:

— Я так и думал. Ты уже *не ждешь*. Ах, черт, как это здорово, Крис. Здорово.

Он протянул руку и легонько стукнул меня по бицепсу.

Потом мы оба уснули.

Наступило субботнее утро. За окном в семичасовом тумане раскатились голоса ребят. Я услышал, как стукнула форточка старика Уикарда и жужжание его парапистолета стало подкрадываться к мальчишкам.

— Сейчас же замолчите! — крикнул он, но совсем беззлобно. Это была обычная субботняя игра. Было слышно, как ребята смеются в ответ.

Проснулся Прайори и спросил:

— Сказать им, Крис, что ты сегодня не пойдешь с ними?

— Ни в коем случае,— Джен прошла от двери к открытому окну, и светлый ореол ее волос потеснил туман.— Здорово, ватага! Ральф и Крис сейчас выйдут. Задержать пуск!

— Джен! — воскликнул я.

Она подошла к нам с Ральфом.

— Проведете вашу субботу, как обычно, вместе с ребятами!

— Я думал побыть с тобой, Джен.

— Разве день отдыха для *этого* существует?

Она живо накормила нас завтраком, поцеловала в щеку и выставила за дверь, в объятия ватаги.

— Давайте не пойдем сегодня к Космодрому, ребята.

— Ты что, Крис... Почему?

Их лица отразили целую гамму чувств. Впервые в истории я отказывался идти к Космодрому.

— Ты нарочно, Крис.

— Конечно, дурака валяет.

— Вот и нет,— сказал Прайори.— Он это серьезно. Мне тоже туда не хочется. *Каждую* субботу ходим. Надоело. Лучше на следующей неделе сходим.

— Да ну...

Они были недовольны, но без нас идти не захотели. Сказали, что без нас неинтересно.

— Ну и ладно... Пойдем на следующей неделе.

— Конечно. А сейчас что будем делать, Крис?

Я сказал им.

В этот день играли в «бей банку» и другие, давно оставленные нами игры, потом пошли в небольшой поход вдоль ржавых путей старой, заброшенной железной дороги, побродили по лесу, сфотографировали каких-то птиц, поплавали нагишом, и я все время думал об одном: сегодня последний день.

Все, что мы когда-либо затевали по субботам, все это мы вспомнили. Всякие там штуки и проказы. И, кроме Ральфа, никто не подозревал о моем отъезде, и с каждой минутой все ближе подступали заветные «пять часов».

В четыре я сказал ребятам «до свидания».

— Уже уходишь, Крис? Ну, а вечером что?

— Заходите в восемь,— сказал я.— Пойдем посмотрим новую картину с Салли Гибберт!

— Так точно.

— Ключ на старт!

И мы с Ральфом отправились домой.

Мамы дома не было, но на моей кровати лежал ролик аудиофильма, на котором она оставила частицу себя — свою улыбку, свой голос, свои слова. Я вставил ролик в проектор и навел на стену. Мягкие русые волосы, мамино белое лицо, ее негромкий голос:

— Не люблю я прощаться, Крис. Пойду в лабораторию, поработаю там. Счастливо тебе. Крепко-крепко обнимаю. Когдя я тебя снова увижу... ты будешь мужчиной. И все.

Прайори ждал за дверью, а я в четвертый раз прокрутил ролик.

— Не люблю я прощаться, Крис. Пойду... поработаю... счастливо. Крепко... обнимаю...

Я тоже еще накануне вечером записал ролик. Теперь я засунул его в проектор и оставил — два-три прощальных слова.

Прайори проводил меня до полудороги. Нельзя же, чтобы он ехал со мной до Космопорта. У станции монорельсовой я крепко пожал ему руку и сказал:

— Отлично мы сегодня день провели.

— Ага. Теперь, что же, до следующей субботы?

— Хотел бы я ответить «да».

— Все равно ответь «да». Следующая суббота — лес, ватага, ракеты, старина Уикард с его верным парапистолетом.

Мы дружно рассмеялись.

— Договорились. В следующую субботу, рано утром. А ты береги... береги *нашу* маму, ладно, Прайори, обещаешь?

— Что за глупый вопрос, балда ты,— сказал он.

— Точно, балда.

Он глотнул.

— Крис.

— Да?

— Я буду ждать. Так же, как ты ждал, а теперь тебе больше не нужно ждать. Буду *ждать*.

— Думаю, тебе не придется ждать долго, Ральф. Я надеюсь, что недолго.

Я легонько стукнул его разок по руке. От ответил тем же.

Закрылась дверь монорельсовой. Кабина ринулась вперед, и Прайори остался позади.

Я вышел на остановке «Космопорт». До здания управления было каких-нибудь пятьсот метров. Я шел этот отрезок десять лет.

«Когда я тебя снова увижу, ты будешь мужчиной...»

«Никому ни слова...»

«Я буду ждать, Крис...»

Все это — пробкой в сердце, и никак не хочется уходить, и плавает перед глазами...

Я подумал о своей мечте. Лунная ракета. Теперь она уже не будет частицей моей души, моей *мечты*. Теперь я стану ее частицей.

Я все шел, и шел, и шел, чувствуя себя совсем ничтожным.

В ту самую минуту, когда я подошел к управлению, стартовала вечерняя Лондонская ракета. Она всколыхнула землю, и всколыхнула и наполнила сладким трепетом мое сердце.

И я сразу начал страшно быстро расти.

Я провожал глазами ракету до тех пор, пока рядом со мной не щелкнули чьи-то приветствующие каблуки.

Я окаменел.

— К. М. Кристофер?

— Так точно, сэр. Явился по вызову, сэр.

— Сюда, Кристофер. В эти ворота.

В эти ворота и *внутрь* ограды...

Ограды, к которой неделю назад мы приникали лицом, и чувствовали, как ветер становится жарким, и еще сильней прижимались к ней, забывая, кто мы, откуда мы, мечтая только о том, кем мы могли бы быть и куда попасть...

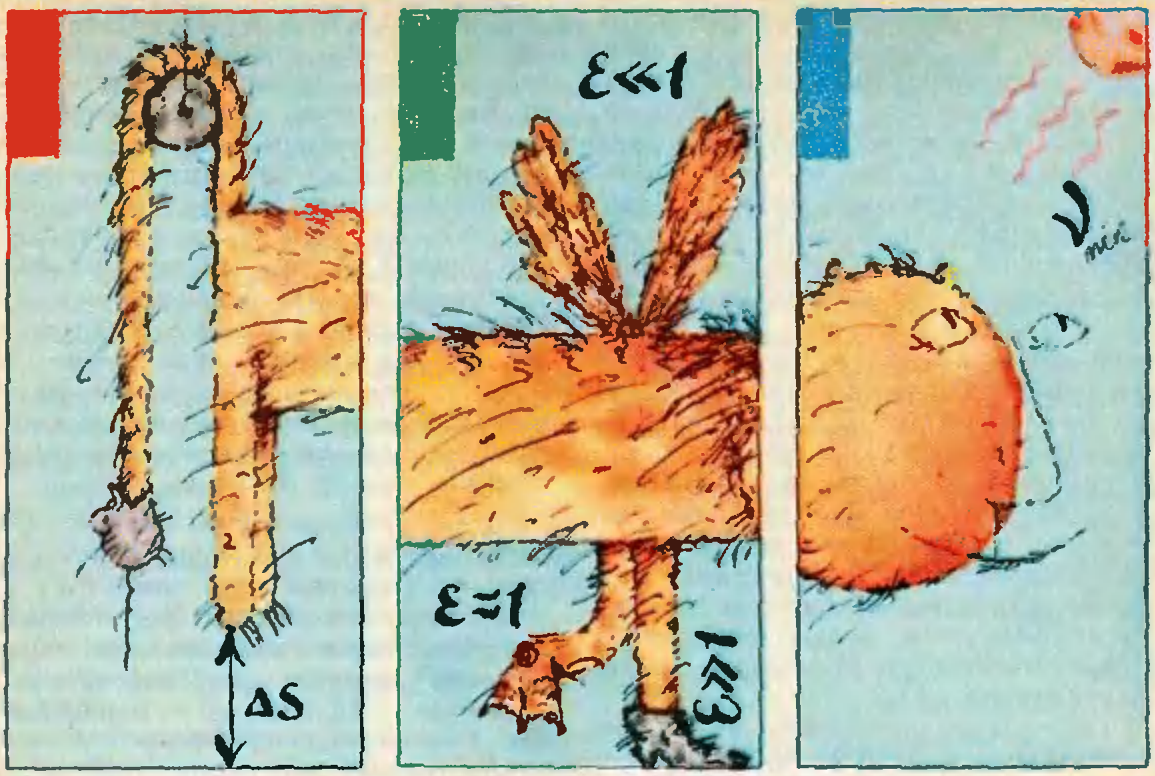
Ограды, у которой неделю назад стояли мальчишки, которым нравилось быть мальчишками, нравилось жить в небольшом флоридском городе, и школа безусловно нравилась, и нравилось играть в футбол, и папы и мамы им тоже нравились...

Мальчишки, которые каждую неделю, каждый день, каждый час хоть минуту непременно думали о пламени, и звездах, и ограде, за которой все это их ожидало... Мальчишки, которым ракеты нравились *больше*.

Мама, Ральф, мы увидимся. Я вернусь. Мама! Ральф!

И я прошел через ворота и вошел внутрь ограды.

Этот рассказ перепечатан из сборника фантастических рассказов Рэя Брэдбери (М.: Детская литература, 1973). Перевод с английского Н. Галь и Э. Кабалевской.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений» предназначена восьмиклассникам, заметка «Сколько бывает состояний у вещества?» — девятиклассникам, «Несколько замечаний по поводу фотоэффекта» — десятиклассникам.

Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений

Рассказывают, что для строительства одного из соборов в Швейцарии его архитектору понадобились блоки, позволяющие поднимать на большую высоту особо тяжелые грузы. Он сконструировал весьма сложный полиспаст, но запутался в многочисленных силах натяжения тросов и так и не смог рассчитать, сколько же человек нужно будет нанять для его обслуживания. За помощью архитектор обратился к известному ученому Иоганну Бернулли (1667—1748). Каково же было удивление архитектора, когда Бернулли, едва взглянув на чертеж, тут же дал ответ. Пораженный архитектор попросил открыть ему тайну столь быстрого расчета...

Попробуем и мы (вслед за Бернулли) обсудить условия равновесия механической системы с несколько иных позиций, чем это сделано в седьмой главе школьного учебника «Физика 8».

Обычно для того, чтобы выяснить условия равновесия системы, вводят *силы реакции механических связей**). Связями принято называть те *ограничения*, которые наложены на положение отдельных частей системы, или на возможности их перемещения.

*) См. статью А. И. Черноуцана «Кинематические связи в задачах динамики» во втором номере журнала за 1988 год.

В качестве примеров механических связей можно назвать нить, на которой подвешен груз, шарнир, соединяющий отдельные части механизма, плоскость, на которой находятся тела системы, и т. п. Чем больше в системе связей (например, нитей в полиспасте, сконструированном нашим архитектором), тем сложнее проследить за действием всех возникающих в них сил реакции.

Во многих случаях механические связи обладают неким замечательным свойством, которое Бернулли и положил в основу своего простого и изящного способа нахождения условий равновесия механической системы. Это свойство заключается в том, что *полная работа всех сил реакции, возникающих в связях системы при любых достаточно малых возможных отклонениях ее от положения равновесия, равна нулю.*

Тут следует специально оговорить, что подразумевается под «любыми достаточно малыми возможными отклонениями» системы от положения равновесия. Прежде всего, конечно, перемещения точек системы, определяющие такие отклонения, не должны противоречить механическим связям (нити не должны рваться, шарниры — ломаться). Такие перемещения называют возможными, или виртуальными (что означает — мысленными). Их следует отличать от истинных перемещений, которые происходят под действием приложенных сил. Виртуальные перемещения не имеют отношения к процессу движения системы — они вводятся лишь для того, чтобы выявить существующие в системе соотношения сил и установить условия равновесия. Малость же перемещений нужна для того, чтобы можно было силы реакции считать неизменными.

Связи, для которых сумма элементарных работ сил реакции при любых виртуальных перемещениях равна нулю, называют идеальными. Подчеркнем, что не все связи идеальны. Так, если тела системы лежат на плоскости с трением, то эта связь (плоскость) уже не идеальна.

Рассмотрим, как выполняется свойство идеальных связей на примере системы точек, образующих абсолютно твердое тело. Любая точка A такого тела связана со всеми другими точками силами реакции. Выделим какую-либо точку B и обозначим силы реакции, действующие между точками, через $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$ (первая из них приложена к точке A, вторая — к B). Забудем на время обо всех остальных точках тела, кроме двух выделенных. Тогда у нас остается система двух материальных точек, соединенных невесомым жестким стержнем. Согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}. \qquad (*)$$

Совершим теперь некоторые виртуальные перемещения этих точек $\Delta\vec{s}_A$ и $\Delta\vec{s}_B$. Можно считать, что $\Delta\vec{s}_A$ — общее для обеих точек поступательное перемещение твердого тела как целого, а $\Delta\vec{s}_B=\Delta\vec{s}_A+\Delta\vec{s}\,'$, где $\Delta\vec{s}\,'$ — перемещение, соответствующее вращению точки B относительно точки A. Полная работа сил реакции при этих виртуальных перемещениях есть

$$\Delta A=(\vec{F}_{AB}\cdot\Delta\vec{s}_A)+(\vec{F}_{BA}\cdot\Delta\vec{s}_B)=$$
$$=((\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{BA})\cdot\Delta\vec{s}_A)+(\vec{F}_{BA}\cdot\Delta\vec{s}\,').$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу условия (*). Равным нулю оказывается и второе слагаемое, так как перемещение $\Delta\vec{s}\,'$, соответствующее вращению точки B относительно точки A, перпендикулярно силе $\vec{F}_{BA}$, которая направлена вдоль прямой, соединяющей точки A и B. Точно так же можно показать, что виртуальная работа (т. е. полная работа при виртуальных перемещениях) сил реакции и для любых других точек твердого тела равна нулю. Таким образом, на рассмотренном примере мы убедились в справедливости обсуждаемого свойства идеальных связей.

Для того чтобы окончательно сформулировать новый принцип равновесия, нам осталось рассмотреть виртуальную работу внешних сил. Заметим, что каждая приложенная к системе внешняя сила в условиях равновесия должна находиться в равновесии с силами реакции, вызванными ею. Поэтому если теперь вычислить полную работу, совершаемую внешними силами и силами реакции связей при любом виртуальном перемещении, то и она окажется равной нулю. Но относительно сил реакции мы уже знаем, что они никакой полной работы не совершают. Следовательно, при любом виртуальном перемещении полная работа внешних сил также должна быть равна нулю.

Итак, условие равновесия механической системы может быть сформулировано в виде так называемого принципа виртуальных (возможных) перемещений:

для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех действующих на систему внешних сил при любых виртуальных перемещениях системы была равна нулю.

Благодаря этому принципу, сформулированному Иоганном Бернулли в 1717 году, для нахождения условий равновесия нет необходимости рассматривать большое число сил реакции связей. Достаточно выбрать удобные виртуальные перемещения, вычислить соответствующую им полную работу только внешних сил и приравнять ее нулю.

Проиллюстрируем применение этого принципа на простейшем примере — найдем силу упругости пружины, к которой подвешен груз массой m. В качестве системы выберем сам груз. К нему приложены две внешние силы — сила упругости пружины $\vec{T}$ и сила тяжести груза $m\vec{g}$. Представим себе, что мы сместили находящийся в равновесии груз на малую величину Δx вниз. Тогда работа силы тяжести будет равна

$$\Delta A_1 = mg\Delta x,$$

а работа силы упругости пружины —

$$\Delta A_2 = -T\Delta x.$$

Согласно принципу виртуальных перемещений, сумма работ обеих сил должна быть равна нулю:

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = mg\Delta x - T\Delta x = 0,$$

откуда получаем

$$T = mg.$$

Эту задачу, конечно же, можно было бы решить и обычным способом — используя общие условия равновесия тел. Причем в данном случае оба метода по степени сложности одинаковы. Однако в целом ряде случаев применение метода виртуальных перемещений приводит к более быстрому и простому решению, а иногда даже позволяет решать задачи, которые в принципе не разрешимы на основе обычных условий равновесия.

Заметим также, что метод виртуальных перемещений может успешно применяться при решении не только механических задач, но и задач электростатики, молекулярной физики.

А. А. Варламов

Сколько бывает состояний у вещества?

В этой заметке мы хотим рассказать немного о различных состояниях вещества — о самых известных, несколько менее известных и совсем мало известных.

Любое тело — это огромное число движущихся и взаимодействующих друг с другом молекул. Кажется совершенно естественным, что, когда взаимодействие молекул друг с другом слабое, молекулы должны образовывать газ; в противном же случае, когда взаимодействие велико,— твердое тело; в промежуточном случае — жидкость. Это, безусловно, так. Только в физике не существует понятий малой или большой величины без сравнения с чем-то. В данном случае энергию взаимодействия молекул надо сравнивать с их кинетической энергией.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул $\bar{E}$ непосредственно связана с температурой T системы: $\bar{E} = {}^3/_2 kT$. Так как нас интересуют только качественные соображения, множитель $^3/_2$ мы учитывать не будем. Обозначим среднюю энергию взаимодействия молекулы со своим окружением через U. Введем параметр ε, равный отношению средней энергии взаимодействия к средней кинетической энергии: $\varepsilon = U/kT$. Теперь можно записать условия существования газа, жидкости и твердого тела. Если $\varepsilon \ll 1$, мы имеем газ (молекулы быстро двигаются, почти не взаимодействуя друг с другом). Когда $\varepsilon \gg 1$, система представляет собой твердое тело (молекулы «зажаты» на своих местах). Промежуточный случай, когда $\varepsilon \approx 1$, соответствует жидкости. Но внутри каждого из этих очень больших классов состояний существует довольно большое разнообразие.

Остановимся прежде всего на твердом теле. Из условия $\varepsilon \gg 1$ ясно, что состояние твердого тела определяется в основном энергией взаимодействия молекул. Как известно, любая система, предоставленная самой себе, стремится занять такое положение, чтобы ее потенциальная энергия была минимальной (под потенциальной энергией здесь надо понимать именно энергию взаимодействия молекул друг с другом). Так вот, оказывается, что минимуму энергии соответствует состояние, когда молекулы расположены строго периодически. Другими словами, устойчивому равновесию соответствует не просто твердое тело, а конкретно кристалл. Это первый, наиболее хорошо изученный тип твердых тел. Свойства кристаллов целиком определяются типом кристаллической решетки. Бывают решетки, составленные из кубиков, шестигранных призм, параллелепипедов и т. п. При нагревании кристаллов (например, при атмосферном давлении) существует температура (внимание! вполне определенная температура), при которой кристаллическая решетка становится неустойчивой. Начинается плавление (понятно, что температура плавления должна определяться из условия $\varepsilon \approx 1$, т. е. $kT_{\text{пл}} \approx U$).

Другой тип твердого тела возникает в том случае, когда при охлаждении жидкости атомы теряют свою подвижность раньше, чем успевают выстроиться в кристаллическую решетку. Теперь они бы и «хотели» упорядочиться, да не могут. Точнее, могут, но для этого им надо очень много времени. Мы получаем твердое, но не кристаллическое, а аморфное тело. Типичным примером таких тел является стекло. При нагревании стекло постепенно размягчается и, в конечном счете, превращается в жидкость, но никакой определенной температуры плавления не существует.

Получится ли при охлаждении данной жидкости кристалл или аморфное тело, сильно зависит от скорости охлаждения. Например, для получения аморфных металлов скорость охлаждения должна быть колоссальной (расплавленный металл разбрызгивают на охлаждаемую жидким азотом поверхность). Но это не единственное условие. Например, из глицерина, как ни старайся, кристалл не получится (причина этого на сегодня не совсем ясна).

Если речь идет о телах, состоящих из молекул простой формы, то никаких других возможностей, по всей видимости, нет. Но, к счастью, мир не так прост. Вы хорошо знаете, что существуют органические (да и не только органические) молекулы чрезвычайно сложной формы. Вещества, построенные из таких молекул, могут находиться в необычных состояниях, которые нельзя отнести ни к жидким, ни к твердым. Вот несколько примеров.

Наиболее типичным свойством жидкости является ее изотропность, т. е. одинаковость свойств во всех направлениях. Одинаковы теплопроводность, механические свойства, скорость распространения различных волн (упругих или электромагнитных) и т. д. Так вот, около ста лет назад были открыты жидкости, не обладающие изотропностью,— так называемые анизотропные жидкости. С тех пор было найдено (и создано искусственно) огромное число таких жидкостей. Главной их особенностью является то, что в одних направлениях они обладают свойствами кристалла (например, периодичностью внутренней структуры), а в других — нет. Это жидкие кристаллы. За совмещение таких, казалось бы, несовместимых свойств, как текучесть и упорядоченность, они получили название мезофаз (*мезо* означает промежуточный; т. е. промежуточных фаз).

Длинные полимерные молекулы могут образовывать еще один класс состояний, к которым относятся, например, холодец или резина. В этих состояниях длинные молекулы объединяются в разветвленные цепи или сетки. В результате возникает своеобразное, похожее на желе тело, которое называется «гель». Состояния этого типа также чрезвычайно распространены в природе.

Наконец, очень кратко остановимся на в каком-то смысле экстремальных состояниях вещества.

При нагревании газа кинетическая энергия его молекул растет и может оказаться порядка энергии ионизации атомов. Тогда при столкновении молекул друг с другом атомы могут ионизоваться, и мы получим смесь нейтральных и заряженных (положительно и отрицательно) частиц. Очень важно, что количество положительных и отрицательных зарядов при этом всегда одинаково, так что в целом газ электронейтрален. Это плазма, совершенно специальное и обладающее уникальными свойствами состояние вещества.

И в заключение обратимся к... звездам. Звезда — это гигантское газовое и пылевое облако, стремящееся сжаться под действием сил гравитационного притяжения. В результате такого сжатия температура в сердцевине звезды растет, и в какой-то момент зажигается термоядерная реакция: ядра водорода сливаются, превращаясь в гелий. Выделяющаяся при этом энергия препятствует дальнейшему сжатию, звезда стабилизируется (именно на такой стадии звездной эволюции находится наше Солнце). Но постепенно водород выгорает, и сжатие возобновляется. Колоссальное давление, возникающее при этом, раздавливает атомы. Возникает состояние, в котором электроны как бы свободно плавают в поле голых ядер. Если масса звезды не слишком велика (меньше 1,25 массы Солнца), то специфическое отталкивание, существующее между электронами, препятствует дальнейшему сжатию (отталкивание это не связано с электрическими силами, а носит сугубо квантовый характер). В результате возникает совершенно особое состояние с огромной плотностью (порядка 60 т/см^3). Звезды, устроенные таким образом, носят название белых карликов (из-за светло-голубого свечения и малых размеров). Если масса звезды большая (больше 1,5—2 масс Солнца), то уже и электроны не могут противостоять гравитационному сжатию. В результате они (электроны) вдавливаются в ядра и, сливаясь с протонами, образуют нейтроны. Возникает вещество, состоящее не из атомных ядер, а из нейтронов, с совсем уж фантастически большой плотностью ($\approx 2 \cdot 10^9$ т/см^3). Это нейтронные звезды.

На этом мы, пожалуй, остановимся. Хотя, прямо скажем, список удивительных состояний вещества, существующих в природе, еще далеко не исчерпан.

Е. Е. Городецкий

Несколько замечаний по поводу фотоэффекта

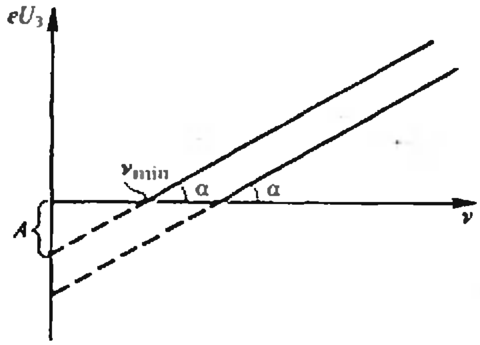
В школьном курсе физики вы познакомились с явлением фотоэффекта, т. е. испускания электронов веществом под действием света, и его закономерностями («Физика 10», глава 10).

Что является главным в теории фотоэффекта? Конечно же, гипотеза световых квантов — фотонов. Фотоэффект можно представить как результат двух последовательных процессов: 1) поглощение кванта света электроном, 2) вылет электрона за пределы вещества. Если происходят оба процесса, явление правильнее называть внешним фотоэффектом. Если же поглощение фотонов не приводит к вылету электронов из вещества, но изменяет его электропроводность, то говорят о внутреннем фотоэффекте (обычно наблюдается в полупроводниках). Собственно фотоэффектом часто называют сам акт поглощения фотона электроном.

Возникает вопрос: может ли фотоэффект происходить на отдельно взятом свободном электроне? На первый взгляд — почему бы нет? Ведь мы же говорим: фотон поглощается электроном. При чем же здесь вещество? Возьмем электрон, посветим на него фонариком, и он начнет «глотать» фотоны и разгоняться! Оказывается, ничего не выйдет. Свободный электрон не сможет поглотить ни одного фотона. Он, правда, сдвинется с места, но причиной будет не поглощение, а рассеяние фотонов. Это тоже очень интересный процесс — известный вам эффект Комптона, в котором ярко проявляются квантовые свойства света, но... не фотоэффект.

Почему же фотон не может поглотиться свободным электроном? Проведем, как говорят математики, доказательство «от противного». Пусть электрон (покоящийся или движущийся) поглощает налетающий на него фотон, и при этом изменяется его скорость. Оказывается, такой процесс запрещен законами сохранения энергии и импульса. Это становится очевидным, если выбрать такую инерциальную систему отсчета, в которой электрон после фотоэффекта покоится. Смотрите сами. Что мы имеем в конечном состоянии? Покоящийся электрон и ничего больше. А в начальном состоянии? Движущийся электрон да еще и фотон впридачу. Энергия, действительно, не сохраняется.

Значит, фотоэффект «по всем законам» возможен только в присутствии третьего участника. В металлах, полупроводниках эту роль играют ионы кристаллической решетки. Но при подсчете энергии (например, в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта) мы их не учитываем потому, что бла-



годаря своей большой массе ионы обычно забирают очень малую часть энергии (играя при этом важную роль в законе сохранения импульса).

А возможен ли фотоэффект на отдельно взятом атоме (или молекуле) — например, в газе? Оказывается, да. Фотон поглощается одним из электронов атома, а лишний импульс уносится атомным ядром. Интересно отметить, что впервые фотоэффект был обнаружен Г. Герцем именно в опытах с газами (1887 г.). Он исследовал электрический пробой воздушного промежутка между электродами и обнаружил, что при облучении этого промежутка светом пробой наступает при меньшем напряжении.

Почему же в школьном курсе физики подробно обсуждается лишь внешний фотоэффект? Ведь при любом фотоэффекте происходит главное квантовое явление — поглощение фотона электроном. Все дело в том, что законы внешнего фотоэффекта достаточно просты и их сравнительно легко изучать экспериментально. При этом количественные характеристики фотоэффекта могут быть найдены как из самих экспериментов по внешнему фотоэффекту, так и независимыми способами. Поговорим об этом несколько подробнее.

Уравнение Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

содержит две непосредственно измеряемые величины: частоту света ν и максимальную кинетическую энергию выбиваемых электронов $mv^2/2$. Оптическими методами могут быть созданы пучки света с хорошо известными частотами ν. Для получения сведений о вылетающих электронах (количество электронов, выбиваемых за одну секунду, а также максимальная кинетическая энергия) из исследуемого металла изготовляют катод вакуумной лампы. Так как ток через лампу осуществляется как раз выбиваемыми электронами, то из вольтамперной характеристики лампы можно получить всю необходимую информацию. В частности, максимальная кинетическая энергия электронов выражается через задерживающее напряжение $U_з$:

$$\frac{mv^2}{2}=eU_з.$$

Если для различных металлов нанести на график экспериментальные зависимости $eU_з$ от частоты света ν, то, в соответствии с уравнением Эйнштейна, получатся параллельные прямые (см. рисунок). По наклону этих прямых можно вычислить постоянную Планка h, а по точкам пересечения графиков с осями — найти работу выхода A и предельную частоту ν_{min}, называемую красной границей фотоэффекта. Как вы знаете, впервые понятие о квантовании энергии ($E=h\nu$), а также постоянная h были введены М. Планком для объяснения законов теплового излучения. Из теории фотоэффекта получается такое же (с точностью до ошибок эксперимента) значение h, что сильно укрепило позиции квантовой теории.

А можно ли другим способом, кроме фотоэффекта, измерить работу выхода? Ответ напрашивается сам собой — надо как-то по-другому, без облучения светом, заставить электроны покидать вещество. Самое очевидное — нагревая катод, заставить электроны «испаряться» с его поверхности. Именно это явление — термоэлектронная эмиссия — используется в электронных лампах — диодах, триодах и т. п. Процесс испускания электронов действительно очень похож на испарение — наружу могут вылететь только самые быстрые электроны, энергия которых превышает работу выхода.

Для большинства металлов работа выхода имеет порядок нескольких электронвольт. Много это или мало? Оценим среднюю энергию теплового движения электронов по формуле, которая была получена для одноатомного газа:

$$E=\frac{3}{2}kT.$$

При комнатной температуре ($T\approx300$ К) эта величина составляет несколько сотых долей электронвольта, т. е. в сотни раз меньше, чем работа выхода. Это означает, что количество электронов, которые покидают металл за счет теплового движения, при комнатной температуре очень мало (при изучении фотоэффекта это явление можно не учитывать). Чтобы «испарение» электронов стало заметным процессом, надо нагреть катод до нескольких тысяч градусов.

Исследуя зависимость числа испускаемых электронов от температуры, можно вычислить работу выхода. Полученные таким способом значения работы выхода хорошо согласуются с предсказаниями теории внешнего фотоэффекта, что является важным независимым подтверждением правильности ее основных положений.

А. И. Черноуцан

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

(Днепропетровск) 17; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 05—07,13; *А. Дунаевский* (Москва) 07,13; *В. Дядечко* (Винница) 03—05,13—17; *А. Ефимчик* (Минск) 03; *А. Жук* (Ровно) 03—07,17; *В. Журавлев* (Донецк) 13; *В. Завадский* (Минск) 05,12—17; *В. Зайцев* (Борисоглебск) 05; *А. Залеский* (Харьков) 05—07,17; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 03,05; *С. Зеленский* (Семипалатинск) 17; *Д. Золотарев* (Харьков) 03, 13; *К. Зуев* (Вологда) 03,05,13; *А. Зуенков* (Донецк) 05; *М. Игнатьев* (Славянск) 13; *И. Иоппе* (Москва) 03; *С. Казенас* (Алма-Ата) 03—07,13; *В. Камчатный* (Киев) 03—07,17; *М. Капустин* (Львов) 05—07, 13,17; *А. Карпенко* (Брест) 05; *С. Касаманян* (Октемберянский р-н АрмССР) 05; *Д. Кириллов* (Калининград) 05; *А. Кожевников* (Калуга) 03—05,13; *В. Кокоулин* (п. Собино Коми АССР) 13; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 03—05,13; *Д. Комисаренко* (Винница) 03,13—17; *А. Комник* (Старый Оскол) 03—07; *В. Кондратьев* (Калининград) 05; *С. Кореннов* (Васильков) 13; *А. Коршков* (Мозырь)

(Окончание см. на с. 79)

Математический кружок

Можно и нельзя

Кандидат физико-математических наук
С. М. ЛЬВОВСКИЙ,
кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

Формулировки школьных задач чаще всего начинаются словами вроде «вычислите» или «найдите». Однако в математике очень часто встречаются и задачи, в которых требуется не вычислить что-либо, а выяснить, существует ли объект с заданными свойствами. Формулировки таких задач начинаются обычно словами «можно *ли*...» *или* «существует ли...». Ответ на такие вопросы должен быть, естественно, обоснованным. Если мы утверждаем, что нечто сделать можно, то достаточно указать конкретный способ сделать это. Если же мы утверждаем, что чего-то сделать нельзя, *то* примерами тут уже не обойтись, надо придумывать доказательство. Общего рецепта *для* такого рода доказательств не существует; в этой статье мы покажем вам лишь некоторые из приемов, которые могут при этом использоваться.

Вот первый пример на тему «можно и нельзя».

Задача 1. *Для каких натуральных чисел n существует замкнутая ломаная из n звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз? Все пересечения должны происходить внутри звеньев, а не в вершинах; никакие три звена не должны пересекаться в одной точке.*

Решение. Прежде всего заметим, что для некоторых n такой ломаной не существует: например, для $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$. С другой стороны, при некоторых n такую ломаную можно начертить; например, на рисунке 1 показана нужная ломаная при $n=6$. Обратим внимание на следующее свойство этой ломаной: ее звенья образуют три пары, причем звенья каждой пары пересекаются друг с другом, а с другими звеньями не пересекаются (на рисунке 1 каждая пара звеньев начерчена своим цветом). Это свойство вытекает из самого условия задачи: если какая-то ломаная пересекает каждое свое звено ровно один раз, то каждое звено образует пару с пересекающим его звеном. Но, чтобы звенья могли разбиться на пары, их число обязано быть четным. Итак, мы доказали, что для нечетных n требуемой ломаной не существует. Оказывается, что для всех четных $n \geqslant 6$ такие ломаные существуют. Придумайте сами общий способ построения такой ломаной для каждого четного $n \geqslant 6$. Вам поможет в этом рисунок 2.

Задача 2. *Существует ли такое натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения на 4 — четвертой степенью целого числа?*

Решение. Давайте предположим, что такое число m существует, и разложим его на простые множители. Собственно, из его простых множителей нас интересуют только двойки; поэтому мы запишем:

$$m=2^k \cdot p,$$

где p нечетно. Согласно первому условию число

$$2m=2^{k+1} \cdot p$$

квадрат целого числа, откуда $k+1$ четно, а потому k нечетно. Согласно второму условию число

$$4m=2^{k+2} \cdot p$$

четвертая степень целого числа, откуда $k+2$ делится на 4. Но если k нечетно, то и $k+2$ нечетно, и потому не может делиться на 4. Полученное противоречие показывает, что искомого числа не существует.

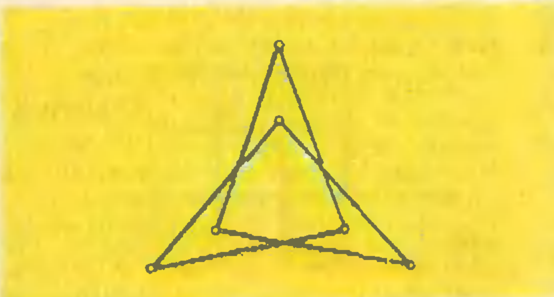


Рис. 1.

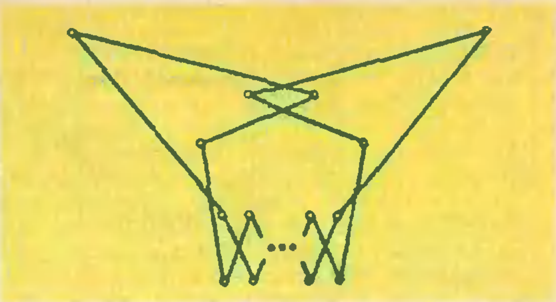
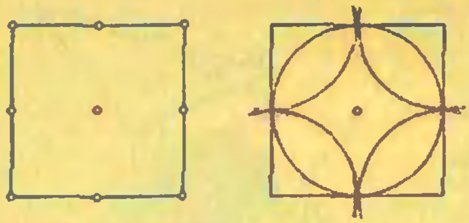


Рис. 2.

Задача 3. *Какое наибольшее количество точек можно расположить в квадрате со стороной 1 так, чтобы все расстояния между этими точками были не меньше 0,5? («В квадрате» означает «внутри квадрата или на его границе».)*

Эта задача тоже из серии задач «можно или нельзя». Ее решение должно состоять из двух частей: *доказательства* того, что столько точек расположить требуемым образом можно, и того, что большего количества точек так расположить уже нельзя. Нетрудно понять, как расположить требуемым образом девять точек; одну точку поставить в центре квадрата, четыре — в вершинах и еще четыре — в серединах сторон (рис. 3, *а*). Возникает предположение, что больше чем девять точек требуемым образом расположить нельзя. Как это доказывать? Весьма привлекательно выглядит, например, такой путь доказательства: рассмотреть вышеуказанную расстановку девяти точек (в центре, вершинах и серединах сторон) и постараться после этого установить, что еще одна точка, добавленная к этим девяти, будет находиться на расстоянии, меньшем 0,5, от хотя бы одной из первых девяти. Это утверждение совершенно верно (например, потому, что круги радиусом 0,5 с центрами в первых *девяти* точках покрывают весь квадрат — рис. 3, *б*), но, к сожалению, оно не дает решения нашей задачи. В самом деле, откуда уверенность, что единственный способ требуемого расположения девяти точек — это рисунок 3, *а*? Вдруг девять точек удастся расположить как-то по-другому, да так, что к ним можно будет добавить еще и десятую?



а) б)

Рис. 3.

Чтобы доказать, что больше девяти точек расположить в квадрате требуемым образом нельзя, воспользуемся вот каким приемом. Разобьем наш квадрат на 9 равных квадратиков со сторонами 1/3 (рис. 4). Если в большом квадрате расположено больше девяти точек, то хотя бы две из них попадут в один и тот же маленький квадратик. Расстояние между любыми двумя точками квадрата не превосходит, очевидно, длины диагонали этого квадрата. Но диагональ квадрата со стороной 1/3 равна $\sqrt{2}/3<0{,}5$. Значит, более девяти точек расположить требуемым образом невозможно, и ответ к задаче 2 — это д е в я т ь точек.

Соображение, которым мы воспользовались при решении задачи 2: «если более чем 9 точек распределить по 9 квадратикам, то хотя бы две из этих точек попадут в *один квадратик*» — часто называют «принципом Дирихле» в честь замечательного немецкого математика П. Г. Дирихле (1805—1859).

В задачах 2 и 3 утверждение о существовании доказывалось построением конкретного примера. В задаче 4 приходится *действовать по-иному.*

З а д а ч а 4. *Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно двум. Каждое следующее число равно сумме десятых степеней цифр предыдущего числа. Докажите, что в этой последовательности встретятся два одинаковых числа.*

Посмотрим, что за числа получаются в этой последовательности. Второе число равно $2^{10}=1024$. Третье число равно $1^{10}+2^{10}+4^{10}=1+1024+1024^2=1\,049\,601$.

Четвертое число уже так велико, что становится ясно: «вручную» мы двух одинаковых чисел не найдем. Более того, возникает сомнение, верно ли вообще то, что нас просят доказать? На первый взгляд, числа быстро растут, и повторов не предвидится. Однако не будем спешить с выводами; вместо точных вычислений наших чисел посмотрим, сколько цифр может быть в их записи.

Четвертое число равно $1^{10}+4^{10}+9^{10}+6^{10}+1^{10}$, а это меньше, чем $10^{10}+10^{10}+10^{10}+10^{10}+10^{10}=5\cdot10^{10}$. Однако $5\cdot10^{10}$ — одиннадцатизначное число (это пятерка с десятью нулями); значит, в четвертом числе не более одиннадцати цифр. Пятое число — это сумма десятых степеней цифр четвертого числа. Каждая из этих десятых степеней меньше чем 10^{10}, всего цифр не больше 11, значит, пятое число меньше, чем двенадцатизначное число $11\cdot10^{10}$. Стало быть, пятое число содержит не более 12 цифр. Рассуждая аналогично, получаем, что шестое число меньше $12\cdot10^{10}$ и, стало быть, опять имеет не более 12 цифр. Повторяя то же рассуждение, получаем, что в записи седьмого, восьмого и вообще всех последующих чисел нашей последовательности содержится не более 12 цифр. Поскольку чисел, в записи которых содержится не более 12 цифр, *конечное* число, у нас не смогут все время получаться числа, отличные от прежних, и когда-нибудь встретятся два одинаковых числа.

В заключение предлагаем вам задачи для самостоятельного решения (задачи 1—12 составляют задание для

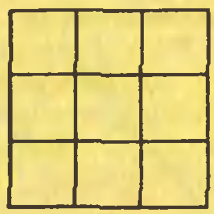


Рис. 4.

семиклассников, желающих поступить во Всесоюзную заочную математическую школу — рассказ об этой школе см. на с. 65).

Задачи

1. Имеются три раствора. Первый из них содержит 2 % вещества *А* и 3 % вещества *Б*. Второй раствор содержит 5 % вещества *А* и 7 % вещества *Б*. Третий раствор содержит 11 % вещества *А* и 12,5 % вещества *Б*.

Можно ли смешать эти растворы в такой пропорции, чтобы полученная смесь содержала 7,5 % вещества *А* и 7 % вещества *Б*?

2. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 написаны подряд. Можно ли так расставить скобки и знаки математических действий, чтобы получилось выражение, равное нулю?

3. Пионер Сережа придумал такой признак делимости на 27: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Верен ли этот признак?

4. Можно ли разрезать квадрат на 1989 квадратиков (не обязательно равных)?

5. Число 1989 возвели в куб и к результату прибавили 3; полученное число опять возвели в куб и к результату прибавили 3; полученное число опять возвели в куб, к результату опять прибавили 3 и т. д. Получилась последовательность чисел, каждое из которых на 3 больше куба предыдущего. Может ли в ней встретиться число, оканчивающееся на 8?

6. Существует ли такое натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, после умножения на 3 — кубом, после умножения на 5 — пятой, а после умножения на 7 — седьмой степенью целого числа?

7. Существует ли такое пятизначное число, что сумма его цифр делится на 13 и сумма цифр числа, на единицу большего, также делится на 13? Если нет — докажите, если да — перечислите все такие числа.

8. Простым числом называется натуральное число, большее 2 и не имеющее делителей, кроме самого себя и 1. Требуется в каждую клетку квадратной таблицы размером 4×4 клетки вписать по простому числу таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце произведение чисел равнялось 1989. Можно ли это сделать?

9. Можно ли так расставить числа в клетках прямоугольной таблицы, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось двум, а произведение чисел в каждом столбце равнялось трем?

10. Можно ли пять различных прямых на плоскости расположить таким образом, чтоб каждая из них пересекала ровно три другие?

11. Расстояние между пунктами *А* и *Б* — пятьдесят километров. В полдень из пункта *А* в пункт *Б* отправились трое друзей. Пешком каждый из них идет со скоростью 5 км/ч. В их распоряжении есть дорожный велосипед, на котором можно ехать со скоростью 10 км/ч, и гоночный велосипед, на котором можно ехать со скоростью 20 км/ч. На каждом велосипеде помещается только один человек; велосипеды можно оставлять на дороге без присмотра. Успеют ли все трое, пользуясь только этими двумя велосипедами, добраться до пункта Б к шести часам вечера?

12. Можно ли расположить на плоскости 7 точек таким образом, чтоб среди любых трех из них нашлись хотя бы две, расположенные на расстоянии 1 см?

13. В футбольном турнире участвовало 10 команд; каждая сыграла с каждой по одному матчу. Согласно опубликованным итогам турнира, команда, занявшая седьмое место, набрала 11 очков, команда, занявшая восьмое место, набрала 6 очков, а команда, оказавшаяся на последнем месте, набрала 4 очка. Могло ли так быть? (За победу команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. При равенстве набранных очков учитывается количество забитых и пропущенных мячей.)

14. Последовательность, состоящая из сорока чисел, строится следующим образом. Первое число равно нулю, второе равно единице. Каждое число, кроме первого и второго, равно сумме каких-то двух из предшествующих чисел. Может ли в такой последовательности встретиться член, равный миллиону?

15. Сколько кругов радиусом 1 нужно взять, чтобы покрыть ими квадрат со стороной 2?

16. Требуется перевезти несколько кусков мрамора общей массой 14 т. Точная масса каждого куска неизвестна, но известно, что масса каждого не более 400 кг. Сколько машин грузоподъемностью в 1500 кг надо заказать, чтобы заведомо можно было увезти этот груз?

17. В стране Мигунов из любого города в любой можно проехать по одной-единственной дороге. Три дороги проходят через 4 города каждая, две дороги проходят через 3 города каждая, а на каждой из остальных дорог лежит по 2 города. Девочка Элли рассказывала, что всего в этой стране 11 городов и 35 дорог. Докажите, что она ошиблась в подсчетах.

18. Круг разбит на n одинаковых секторов, в каждом из которых стоит по шашке. За один ход можно сделать следующее: взять любые две шашки и переставить их: одну — в соседний сектор по часовой стрелке, другую — в соседний сектор против часовой стрелки. При каких n можно с помощью таких ходов собрать все шашки в одном секторе?

19. Квадрат со стороной 1 м выкрасили в две краски. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной не менее 30 см.

Олимпиады

XXIX Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXIX Международная математическая олимпиада проходила с 9 по 21 июля 1988 года в Австралии в Сиднее и Канберре и являлась частью государственной программы, посвященной празднованию 200-летия образования Австралийского Союза.

Безусловно, все мы очень ждали этой олимпиады и тщательно к ней готовились в течение всего года. Нашу страну представляли Сергей Берлов, Сергей Иванов, Николай Филонов, Юрий Хохлов (все четверо — из Ленинграда), Дмитрий Иванов (г. Долгопрудный Московской области), Дмитрий Туляков (г. Жданов). Сергей и Дмитрий Ивановы сейчас учатся в десятом классе и имеют реальные шансы быть включенными в состав команды СССР на XXX олимпиаде, которая состоится в ФРГ в 1989 году; кроме того, для Сергея Иванова олимпиада в Австралии была уже второй Международной олимпиадой, и в обеих он добился замечательных результатов. Руководителями учебно-тренировочных сборов команды и команды на самой олимпиаде были авторы настоящей статьи. Большую помощь в подготовке команды оказали члены редколлегии журнала «Квант».

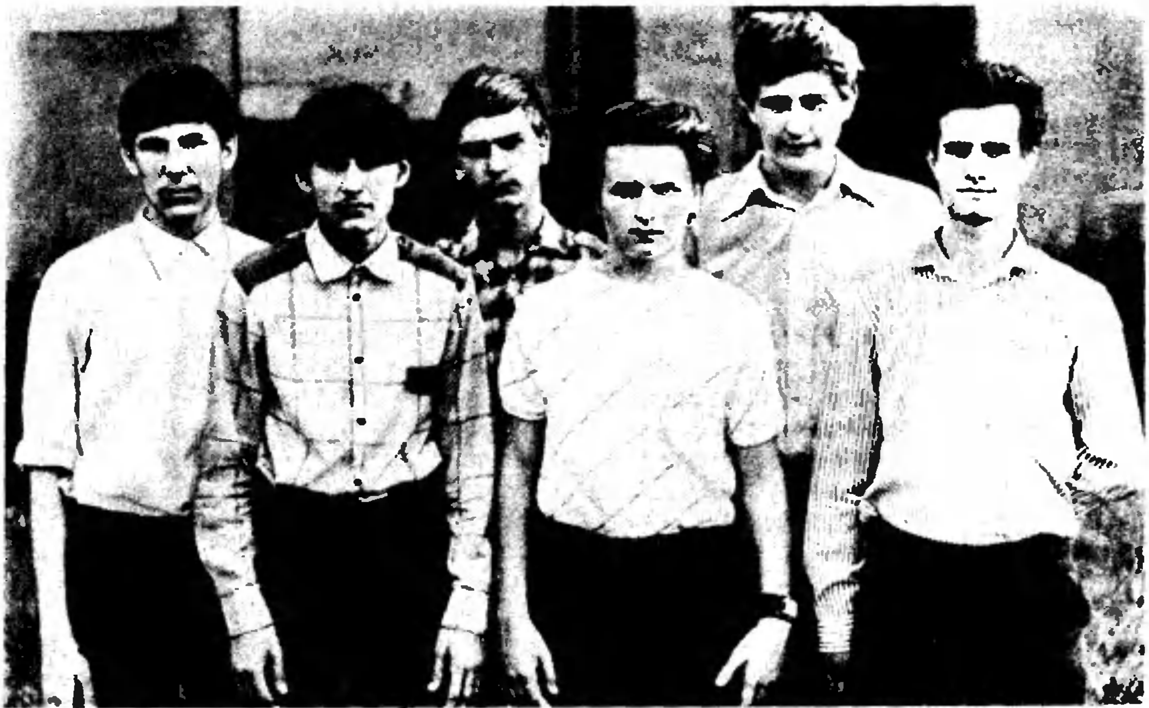
На торжественном открытии олимпиады член Парламента Австралийского Союза министр занятости, образования и обучения Джон Доукинс сказал: «Участие в этом важном международном событии показывает, чего можно добиться, когда страны со всего мира объединяются с целью представления благоприятных условий для образования молодых людей... Своим участием в этой олимпиаде вы утверждаете главные принципы, входящие в основу образовательных систем во всем мире: принцип стремления к совершенству во всех наших делах; принцип сотрудничества как в классной комнате, так и во всех сферах рабочей жизни; и простой, но такой важный, принцип трудолюбия...»

В XXIX ММО приняло участие рекордное число стран — 58, из них 50 стран были представлены командами школьников, а 8 стран — только наблюдателями. Олимпиада прошла на очень высоком научном и организационном уровнях. Ее успеху способствовала большая подготовительная работа, которую возглавляли премьер-министр Австралии Роберт Хоук, министр занятости, образования и обучения Джон Доукинс, президент Академии наук Девид Кэртис, директор Канберрского колледжа высшего образования Роджер Скотт, председатель жюри профессор Рен Поттс, председатель оргкомитета профессор Питер О'Холлоран, председатель комитета по празднованию двухсотлетия Австралии Джим Кэрк, президент ассоциации учителей математики Патрик Костелло, директор фирмы IBM-Австралия Брейн Финн и многие другие.

Международные олимпиады проходят по сложившейся традиции в два тура, в каждом из которых предлагается по три задачи. На тур отводится 4,5 часа рабочего времени, и каждая задача (независимо от ее сложности) оценивается в 7 баллов.

Задачи XXIX ММО

1 (Люксембург). На плоскости даны две окружности с общим центром, радиусы которых соответственно равны r и R, $r<R$. Пусть P — фиксированная точка на маленькой окружности и B — переменная точка на большой окружности. Прямая BP пересекает второй раз большую окружность в точке C. Перпендикуляр l к прямой BC, проходящий



Команда СССР на XXIX Международной математической олимпиаде. Слева направо: Н. Филонов, Д. Туляков, Д. Иванов, С. Иванов, С. Берлов, Ю. Хохлов.

через точку P, пересекает второй раз маленькую окружность в точке A (в случае, когда l — касательная к окружности, считаем, что $A=P$).

1) Найдите множество значений выражения $BC^2+CA^2+AB^2$.

2) Найдите множество точек, являющихся серединами отрезков AB.

2 (Чехословакия). Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ — подмножества некоторого множества B. Предположим, что

a) каждое множество $A_i (i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

b) каждое множество $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

c) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств $A_i (i=1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел 0 или 1 так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ содержало бы равно n элементов соответствующих числу нуль?

3 (Англия). Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

Найдите число всех таких значений n, $1 \leqslant n \leqslant 1988$, для которых $f(n)=n$.

4 (Ирландия). Докажите, что множество решений неравенства

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.

5 (Греция). Пусть AD — высота в прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A=90^\circ$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L. Докажите, что

$$S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}.$$

6 (ФРГ). Пусть a и b — такие целые положительные числа, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ является квадратом целого числа.

Коротко расскажем о том, как производится подбор задач для олимпиады, формируется и работает жюри ММО. Каждой стране-участнице предоставляется возможность предложить не более 6 задач с полными решениями, которые, по возможности, должны охватывать различные разделы школьного курса математики и иметь разную степень трудности. Из всех поступивших на конкурс задач специальная комиссия страны, проводящей олимпиаду, отбирает, как правило, 20—30 задач для дальнейшего обсуждения на заседаниях жюри. В жюри ММО входят научные руководители всех стран-участниц, а также председатель жюри и его заместитель, назначенные организаторами. Все вопросы на заседаниях жюри решаются простым большинством голосов. Наибольшие дискуссии в жюри возникают при оценке сложности задач. Наиболее типичен здесь пример с задачами по стереометрии — большинство стран не желает включать такие задачи в окончательный список задач олимпиады.

Из 275 школьников, участвовавших в ММО, примерно половина была награждена золотыми, серебряными или бронзовыми медалями (приблизительно в отношении 1:2:3). В команде СССР золотыми медалями награждены *Н. Филонов* (42), *С. Иванов* (41), *Д. Туляков* (37) и *Д. Иванов* (36), а серебряными медалями награждены *Ю. Хохлов* (31) и *С. Берлов* (30); в скобках указано набранное участниками число баллов (из 42 возможных).

В неофициальном (как и на спортивных олимпиадах) командном зачете команда СССР заняла первое место (217 баллов из 252 возможных). Далее следуют: Китай (201), Румыния (201), ФРГ (174), Вьетнам (166), США (153), ГДР (145), Болгария (144), Франция (128), Канада (124). Отметим особо, что команды Болгарии и ГДР выступали неполными составами — по 5 школьников. Команда Австралии набрала 110 баллов, один из ее участников Теренс Тао завоевал золотую медаль (34 балла) и один — Джефри Байлей (20 баллов) — серебряную. Теренс Тао третий раз выступает в составе сборной страны — в прошлом году на Кубе он завоевал серебряную медаль, а в 1986 г. в Варшаве — бронзовую. А самое главное, что в период проведения олимпиады этого года ему исполнилось только 13 лет и во время обеда все участники ММО устроили ему громкую овацию, выразив тем самым ему свое восхищение и уважение.

Математические соревнования проходили в два дня, а все остальные дни пребывания были посвящены знакомству со страной, ее достопримечательностями, культурой и искусством, природой, просто и хорошо организованному отдыху, спортивным мероприятиям и взаимному общению членов различных команд. О впечатлениях от экскурсий, о возникших в период олимпиады знакомствах, перевернутом месяце и созвездии Южный Крест, о левостороннем движении, о кенгуру, коала — маленьком медвежонке размером с подушку, какаду, летучих белках и т. д. и т. д. можно рассказывать до бесконечности...

Мы закончим свой рассказ выдержками из речи премьер-министра Австралии Роберта Хоука на очень торжественной и трогательной церемонии закрытия XXIX ММО: «В таких областях, как спорт и искусство, имеется много возможностей для поощрения и раннего открытия талантов, но на интеллектуальном поприще это наблюдается реже. Настоящая Олимпиада представляет как раз такую возможность, причем на том поприще, где стремление к совершенству является предельно важным не только для конкретных лиц, но и для стран в целом. Поощрение совершенства в математике может только способствовать промышленному и экономическому развитию, что, в свою очередь, может привести к лучшей жизни для людей всех наших стран...

Несмотря на всю важность самого математического соревнования, я считаю, что культурный обмен, происшедший здесь, является не менее важным. Я надеюсь, что вы будете поддерживать эти дружественные связи и после того, как покинете Канберру, что вы употребите свои таланты на благо вашей Родины и всего мира, равно как и для личного удовлетворения и осуществления жизненных целей».

Присоединяясь к этим словам, пожелаем членам советской команды больших творческих успехов, крепкого здоровья, большого трудолюбия и целеустремленности в их дальнейшей жизни.

XIX Международная физическая олимпиада

Доктор педагогических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

В этом году Международная физическая олимпиада школьников проходила с 23 июня по 2 июля в городе Бад-Ишль (Австрия). Число стран-участниц олимпиады ежегодно увеличивается (в этом году — на две страны). В Австрию приехали школьники из 27 стран: Австралии, Австрии, Бельгии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Исландии, Италии, Канады, Кипра, Китая, Колумбии, Кубы, Кувейта, Нидерландов, Норвегии, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии.

В проведении олимпиады приняли участие представитель ЮНЕСКО и корреспонденты журналов для школьников из Бельгии, Великобритании, Венгрии, Югославии, Чехословакии. Жаль, что на олимпиаде не оказалось представителя журнала «Квант».*)

В команду СССР, по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам зимних и летних сборов, вошли:

Юрий Кравченко — выпускник с. ш. № 820 г. Москвы,
Александр Мазуренко — выпускник с. ш. № 50 г. Минска,
Антон Малкин — выпускник с. ш. № 30 г. Ленинграда,
Вадим Мороз — выпускник ФМШ № 45 г. Ленинграда,
Константин Пенанен — выпускник с. ш. № 63 г. Одессы.

*) Редакция тоже сожалеет об этом. Остается надеяться, что наше сожаление разделяет и недавно созданный Государственный комитет СССР по народному образованию. (*Примеч. ред.*).

Заметим также, что все участники летнего сбора, включая также Дмитрия Головина — выпускника с. ш. № 29 г. Тамбова, Сергея Панафидина — выпускника с. ш. № 30 г. Ленинграда и Алексея Пушкина — выпускника с. ш. № 57 г. Москвы, зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы — МФТИ, МГУ, ЛГУ.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР.

Торжественное открытие олимпиады состоялось в здании Высшей школы подготовки кадров в области туризма. Школьников приветствовали директор этой школы магистр Р. Гинзел, бургомистр г. Бад-Ишль К. Саллер, председатель Международной комиссии профессор Венского Технического университета П. Скалицкий, заведующий секцией Министерства просвещения, искусства и спорта магистр Л. Лейтнер. Профессор Венского университета Р. Доброземский прочитал яркий доклад на тему «Физика в Австрии», из которого ясно следовало, что Австрия подарила миру не только блестящих художников, музыкантов, поэтов, но и не менее блестящих ученых-физиков: Х. Доплера, Й. Лошмидта, Л. Больцмана, В. Гесса, Э. Шредингера, В. Паули, Э. Маха («конус Маха» был использован в качестве эмблемы олимпиады).

Соревнования проходили, как всегда, в два тура. На теоретическом туре школьникам были предложены три задачи, на экспериментальном — две задачи (на выполнение заданий каждого тура давалось 5 часов). Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1. Определение скорости при помощи эффекта Доплера

Процессы излучения и поглощения фотонов обратимы, поэтому вслед за процессом поглощения фотона атомом может наблюдаться его спонтанное излучение (флуоресценция). Это явление используется в современных методах обнаружения и идентификации частиц, а также для спектроскопии скоростей атомных частиц.

В идеальной экспериментальной установке (рис. 1) движутся частицы (однократно ионизированные ионы) со скоростью v против луча

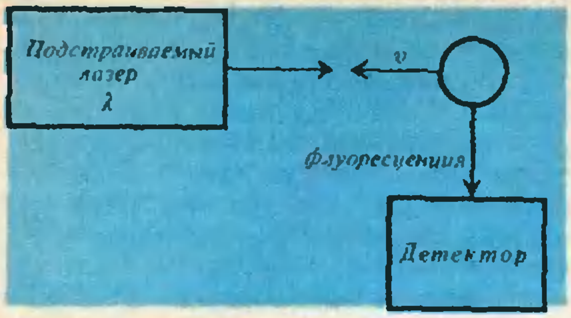


Рис. 1.

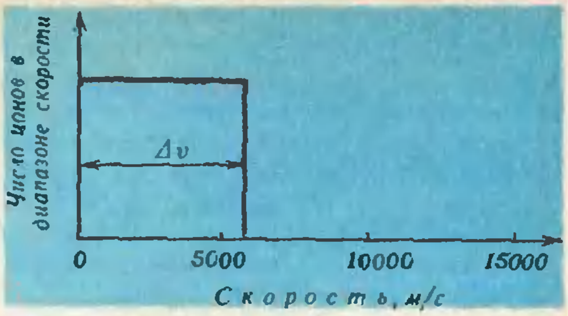


Рис. 2.

лазера с изменяемой длиной волны λ. Покоящиеся частицы ($v=0$) могут быть возбуждены излучением с длиной волны $\lambda_0=600$ нм. Движущиеся частицы, в соответствии с принципом Доплера, возбуждаются излучением с другой частотой, поэтому для их возбуждения лазер должен настраиваться на другую длину волны $\lambda(v)$. Спектр скоростей ионов в диапазоне от $v_1=0$ до $v_2=6000$ м/с приведен на рисунке 2.

1) Используя классический эффект Доплера, определите, в каком диапазоне длин волн должно находиться излучение лазера для возбуждения всех частиц. Представьте качественно распределение числа поглощаемых фотонов в зависимости от длины волны лазера.

Более строгий расчет требует применения релятивистской формулы

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Оцените погрешность при использовании классического приближения.

2) Пусть ионы перед их возбуждением ускоряются электрическим полем с напряжением U. Какова количественная зависимость ширины спектра скоростей Δv от ускоряющего напряжения U? Увеличивается или уменьшается ширина спектра скоростей частиц в результате их ускорения?

3) Ион с отношением заряда к массе $e/m=4\cdot10^6$ Кл/кг имеет две длины волны возбуждения $\lambda_1=600$ нм и $\lambda_2=\lambda_1+10^{-3}$ нм. Покажите, что два интервала длин волн спектра лазера при возбуждении всех ионов перекрываются. Возможно ли разделение спектров возбуждения двух уровней в результате ускорения ионов в электрическом поле с разностью потенциалов U? Если да, то определите минимальное значение напряжения.

Задача 2. Диск Максвелла

Однородный цилиндрический диск (масса $M=0{,}40$ кг, радиус $R=0{,}060$ м, толщина $d=0{,}010$ м) подвешен на двух прикрепленных к его оси (радиуса r) нитях одинаковой длины. Массой и толщиной нитей, а также массой оси можно пренебречь. Подняв центр тяжести диска, наматыванием нитей, на высоту $H=1{,}0$ м, дают диску возможность опускаться (рис. 3). Достигнув самого нижнего положения, диск опять начинает подниматься. Ответьте на следующие вопросы, предполагая для упрощения, что точка A всегда находится на одной вертикали с точкой P (рис. 4).

1) Какую угловую скорость развивает диск после прохождения его центром тяжести пути s?

2) Какую кинетическую энергию поступательного движения имеет диск после прохождения его центром тяжести пути $s=0{,}50$ м? В каком соотношении находится эта энергия с другими видами энергии, если радиус оси $r=0{,}0030$ м?

3) Какова сила натяжения каждой из двух нитей во время опускания диска?

4) Найдите угловую скорость диска во время его подъема как функцию угла поворота φ (рис. 5). Установите, по меньшей мере качественно, компоненты перемещения и скорости центра тяжести диска в декартовой системе координат как функцию угла φ.

5) Минимальное значение силы натяжения, при котором нить разрывается, равно $T_{min}=10$ Н. Какова максимальная высота опускания диска, при которой нить во время подъема диска еще не разорвется?

Задача 3. Процесс рекомбинации в газовом разряде

В высокотемпературной плазме газового разряда находятся $(Z-1)$-кратно ионизированные ионы атомов, содержащих Z протонов в ядре. Обозначим такие атомы $A^{(Z-1)+}$.

1) Рассмотрим случай, когда единственный электрон в атоме $A^{(Z-1)+}$ находится в основном состоянии. В этом состоянии средний квадрат расстояния r_0^2 электрона от ядра определим как сумму квадратов неопределенностей его координат $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ и $(\Delta z)^2$. Средний квадрат импульса P_0^2 электрона определим как сумму квадратов неопределенностей проекций импульса на координатные оси $(\Delta P_x)^2$, $(\Delta P_y)^2$ и $(\Delta P_z)^2$. Какому неравенству удовлетворяет произведение $(P_0^2)\cdot(r_0^2)$?

2) Ион $A^{(Z-1)+}$ может захватить второй электрон и при этом испустить фотон. Запишите уравнения, определяющие частоту этого излучения. (Вычислений частоты производить не нужно.)

3) Вычислите внутреннюю энергию $A^{(Z-1)+}$, исходя из того факта, что в основном состоянии она имеет минимальное значение. Примите при этом следующие приближения: а) используйте в выражении для потенциальной энергии электрона значение $r=r_0$ из вопроса 1; б) используйте в выражении для кинетической энергии средний квадрат импульса P_0^2 из приближенного равенства $(P_0^2)\cdot(r^2)=\hbar^2$.

4) Вычислите аналогичным образом энергию системы $A^{(Z-2)+}$, возникшей в результате ре-

комбинации, в основном состоянии. Обозначьте средние расстояния электронов от ядра r_1 и r_2 (аналогично величине r_0 из вопроса 3). Можно принять, что взаимное расстояние между *электронами равно* (r_1+r_2). *Среднее значение* каждого квадрата импульса удовлетворяет соотношению неопределенностей: $(P_1^2)\cdot(r_1^2)=\hbar^2$ и $(P_2^2)\cdot(r_2^2)=\hbar^2$.

Указание. Используйте тот факт, что энергия атома в основном состоянии минимальна при условии $r_1=r_2$.

5) Какое значение имеет Z, если при рекомбинации излучается фотон с частотой $\omega_0=2{,}5\cdot10^{17}$ с$^{-1}$? Что это за ион?

Примечание. В этом пункте рассмотрите только случай рекомбинации иона в основном состоянии с неподвижным электроном.

Экспериментальный тур

Задача 4. Поляризованный свет

Вам предоставляются следующие приборы: лампа накаливания на подставке, 3 рамки деревянные с отверстием, 2 стеклянные пластины (1 прямоугольная, 1 квадратная), поляризационная пленка (круглая), лист красной пленки, рулон клейкой ленты, лист целлофана (прозрачный), 6 самоприклеивающихся этикеток (белых), лист черной бумаги, лист миллиметровой бумаги, треугольник, фломастер (очень тонкий, черный), 2 карандаша (твердый и средний), точилка, резинка, ножницы.

1) Установите на поляризационной пленке пропускное направление (направление колебаний вектора напряженности электрического поля в пропускаемом свете), наблюдая отражение света от поверхности прямоугольной стеклянной пластины. Начертите на пленке прямую в этом направлении (как можно более точно).

Соберите на листе миллиметровой бумаги схему для измерения показателя преломления стекла прямоугольной пластины. При этом нужно учесть следующий факт: когда неполяризованный свет отражается от стеклянной поверхности, максимальная поляризация отраженного света происходит при выполнении условия $\operatorname{tg} i=n$, где i — угол падения луча, n — показатель преломления стекла. Начертите на миллиметровой бумаге прямую проекцию применяемых всех деталей устройства (обведите их контуры карандашом). Отметьте применяемые для обработки важные точки и прямые. Определите показатель преломления стекла.

2) Установите полярископ (прибор для наблюдения поляризации). Полярископ должен сделать возможным осмотр материалов с двойными лучепреломляющими свойствами в плоскополяризованном свете при нормальном его падении. Материалы с двойным лучепреломляющим свойством разделяют луч на две части, которые поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Эти два луча распространяются с разными скоростями. Начертите схему установки и объясните принцип ее действия.

Положите бесцветный целлофановый лист в полярископ, определите положение плоскостей поляризации после прохождения целлофана и отметьте их. Начертите прямые, параллельные плоскостям поляризации, на листе бумаги. Объясните кратко результаты ваших наблюдений — рисунок может помогать вам! — и опишите способ нахождения плоскостей поляризации.

3) Прикрепите 10 полосок предоставленной вам клейкой ленты в виде ступеней на стеклянную пластину, как показано на рисунке 6 (G — квадратная стеклянная пластина, T — 10 полосок клейкой ленты, S — ступени 3—4 мм шириной). Обратите внимание на то, чтобы все пластины имели одинаковую ориентацию! Положите этот препарат на полярископ. Опишите экспериментальные условия, при которых *наблюдаются цвета. Как можно их изменить?* Интерпретируйте кратко ваши наблюдения.

Отфильтруйте «монохроматический» свет двойным слоем красной пленки. Отметьте полоски клейкой ленты (ступени S), которые делают возможным определение оптической разности хода двух компонентов разделенного луча, упомянутого в пункте 2. Оцените числовое значение оптической разности хода, вносимой одним слоем клейкой ленты для красного света.

4) Исследуйте при помощи полярископа центральную часть чертежного треугольника. Опишите самые важные оптические явления.

Объясните результаты наблюдений: сделайте из них выводы о физическом состоянии материала и возможных особенностях производства, обусловливающих это состояние. Сделайте схематический чертеж.

Задача 5. Термоэлектронная эмиссия. Определение работы выхода электрона

Электроны в металле находятся в «потен-

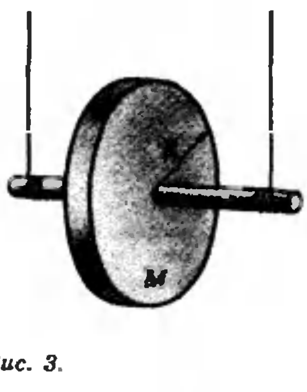


Рис. 3.

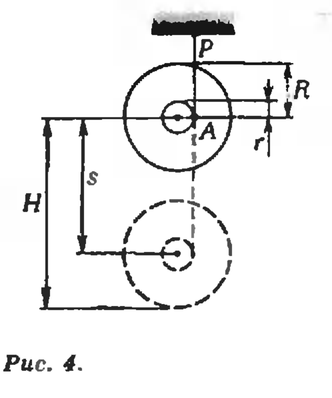


Рис. 4.

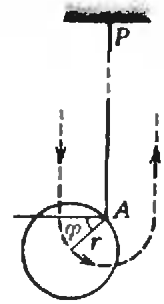


Рис. 5.

Рис. 6.

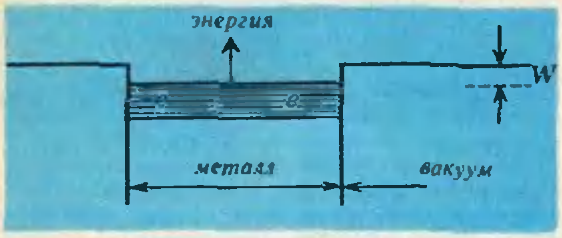


Рис. 7.

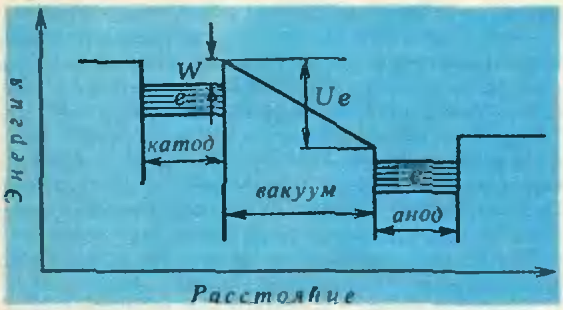


Рис. 8.

циальной яме», из которой они не могут выходить нормальным путем (рис. 7) даже в том случае, когда на металл подается напряжение (рис. 8). Однако, если металл нагреть, то электроны из-за их теплового движения могут преодолевать энергетический порог W и выходить из катода. Количество выходящих в единицу времени электронов зависит только от материала катода и его температуры. От напряжения U зависит, все ли электроны достигают анода или нет. Для заданного катода зависимость силы тока насыщения от температуры приведена на рисунке 9. Для тока насыщения (заряда, уносимого электронами в единицу времени) справедливо уравнение Ричардсона:

$$I_н = CT^2 \cdot \exp(-W/kT), \qquad (*)$$

где W — работа выхода электрона, C — константа, T — температура катода по шкале Кельвина, k — постоянная Больцмана.

Задача состоит в том, чтобы измерить работу выхода W электрона из данного материала. Для этого вам предоставляются следующие приборы: электронная лампа AZ41 (вакуумная двуханодная выпрямительная лампа с напряжением накала не больше 4 В), универсальный электроизмерительный прибор (его внутреннее сопротивление при измерении напряжения 10 МОм), батарея на 1,5 В, 4 батареи по 9 В (батареи могут соединяться последовательно), три резистора, сопротивления которых можно определить по цветным полоскам (сопротивления резисторов 1000 Ом±2 %, 100 Ом±±2 % и 47,5 Ом±1 %), 4 резистора сопротивлением около 1 Ом каждый (они нумерованы), 12 винтовых зажимов, 6 соединительных проводов длиной около 20 см каждый, 2 штепсельных соединения (подходящих к батарее 9 В), отвертка, логарифмическая бумага, миллиметровая бумага.

График зависимости удельного сопротивления материала катода от температуры накала приведен на рисунке 10. Комнатная температура известна.

1) Определите значения сопротивления нумерованных резисторов. Омметр не использовать.

2) Определите ток насыщения при разных температурах катода, т. е. при разных токах накала. Примените для тока накала батарею 1,5 В и варьируйте его при помощи нумерованных резисторов. Под током насыщения вы должны понимать такой ток, который получается при постоянном напряжении 36—40 В между анодом и катодом. Создавайте это напряжение при помощи четырех последовательно соединенных батарей 9 В. Объясните коротко, как вы определили температуру катода.

3) Определите работу выхода W из уравнения (*). Объясните, как вы это сделали.

Даже простой взгляд на условия задач показывает, что все задачи по своему содержанию существенно выходят за рамки программы основного курса физики нашей общеобразовательной школы, а в ряде задач — и за пределы программ факультативного курса (повышенного уровня). Фор-

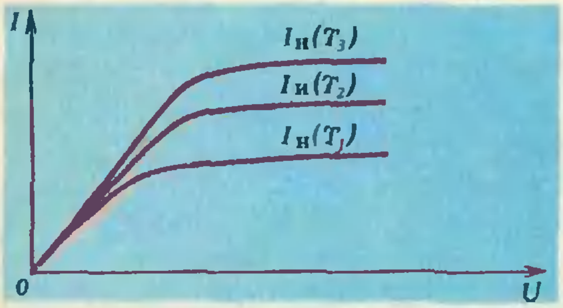


Рис. 9.

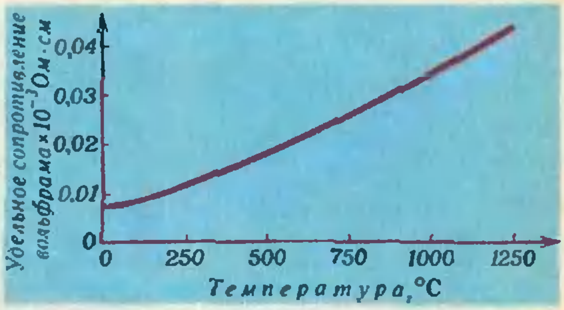


Рис. 10.

мально авторы задач «соблюли букву закона», так как темы всех задач обозначены в программе Международных физических олимпиад, принятой Международной комиссией в 1985 году *). Но глубина трактовки темы, обозначенной в программе может быть любой. Строке в программе «Поляризация электромагнитных волн» соответствовала экспериментальная задача, для успешного выполнения которой было необходимо глубокое понимание явления поляризации, двойного лучепреломления, явления интерференции поляризованного света, существа явления эллиптической поляризации. Два слова из программы — «Соотношение неопределенностей» — позволили авторам включить квантовомеханические задачи как в теории, так и в эксперименте. Аналогично обстоит дело с трактовкой слов программы «Эффект Доплера». Это, безусловно, нужно учесть школьникам и их учителям при подготовке к последующим олимпиадам.

Как же справились с предложенными задачами наши школьники?

Советская команда набрала за первую задачу 41 балл из 50 (каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов), за вторую — 43 балла, за третью — 25,5 балла, за четвертую — 14 баллов, за пятую — 32,13 балла. Сравнивая эти баллы с баллами других команд, можно сделать вывод, что результат за первые две задачи хороший, за пятую — абсолютно лучший. Несколько хуже справились наши ребята с третьей теоретической и первой экспериментальной задачами (например, команде Румынии удалось набрать за третью задачу 39,5 баллов, а команда Польши получила максимальное число баллов — 23,5 — за четвертую задачу).

По общей сумме баллов (155,63) команда СССР была второй после команды Румынии (166,75). Команды остальных стран по общей сумме баллов расположились в следующем порядке: Венгрия (153,25), ФРГ (152,26), Китай (148,25), Швеция (144,34), Болгария (141,51), США (134,63), Польша (130,13), Великобритания (129,26), Нидерланды (126,76), ГДР (123,63), Чехословакия (123,38), Финляндия (122,13), Австралия (121,13), Югославия (103,88), Норвегия (103,01), Австрия (98,38), Италия (92,63), Канада (86,00), Куба (67,51), Кипр (66,51), Вьетнам (59,38), Исландия (58,63), Бельгия (51,15), Колумбия (46,38), Кувейт (6,75).

В этом году советские школьники более успешно справились с экспериментальными задачами, чем с теоретическими. После теоретического тура наша команда делила 5—6 места с командой ФРГ, и только успешное решение экспериментальных задач (прежде всего пятой задачи) позволило ей по сумме баллов выйти на второе место.

А каковы личные успехи советских школьников?

Прежде всего отметим, что все пятеро получили медали: Ю. Кравченко, А. Мазуренко и К. Пенанен — серебряные, А. Малкин и В. Мороз — бронзовые. Обидно, что Ю. Кравченко не «хватило» до золотой медали всего 0,25 балла, а В. Морозу — 0,5 балла до серебряной медали. Абсолютным победителем олимпиады стал английский школьник Мак Доннел, набравший 39,38 баллов (у Ю. Кравченко — 34,75 балла).

Интересно отметить тот факт, что на Международной олимпиаде советские школьники по количеству набранных баллов расположились в обратном порядке по сравнению с их выступлениями на Всесоюзных олимпиадах. Подобный феномен наблюдался и в некоторых предыдущих случаях. Его можно попытаться объяснить случайностью, невезением, но, вероятно, есть тому и объективные причины. Ученики из ведущих школ нашей страны имеют большой запас знаний, достаточный для успешного выступления на привычных олимпиадах:

*) Эта программа опубликована в книге О. Ф. Кабардина и В. А. Орлова «Международные физические олимпиады школьников» (М.: Наука, 1985, серия «Библиотечка «Квант»).

Команда СССР на XIX Международной физической олимпиаде. Слева направо: Ю. Кравченко, А. Малкин, А. Мазуренко, К. Пенанек, В. Мороз.

городских, республиканских и даже всесоюзных. При подготовке же к международным олимпиадам необходима адаптация к новым условиям, «новым правилам игры», нужны дополнительные новые знания. При этом важную роль играет динамика продвижения ученика в изучении нового материала, быстрота его адаптации к новым требованиям, предъявляемым на международных олимпиадах: способность представить лаконично и полно решение задачи, умение «разгадать» заранее составленную авторами «разбалловку» задачи и т. п. (Яркий пример «удачной» динамики усвоения нового показал в свое время Руслан Шарипов из п. Каракуль Бухарской области, который до начала учебного сбора мало видел физических приборов и по многим показателям уступал остальным членам команды. Однако за один месяц он сумел освоить технику эксперимента, пополнить теоретические знания и на X Международной физической олимпиаде 1977 года занять абсолютно первое место.)

Наверное, обязательным условием для всех будущих кандидатов в команду СССР должно быть ознакомление с задачами Всесоюзных и Международных олимпиад прошлых лет. Уровень овладения арсеналом прошлых олимпиад проверяется на зимнем отборочном сборе специальным тестом из 120—150 заданий с выбором правильного ответа. Эти задания используют идеи задач, предлагавшихся на Всесоюзных и Международных олимпиадах. Анализ такого «наследия» МФО можно проводить, например, чтобы выявить пока еще не использованные темы задач и тем самым спрогнозировать возможное содержание будущих задач. Иногда это действительно удавалось сделать.

(Окончание см. на с. 71)

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. Изучите статью С. М. Львовского и А. Л. Тоома «Можно и нельзя» в этом номере журнала и постарайтесь решить задачи № 1—12 в конце статьи. Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все 12 задач.

Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1975
Класс и школа	7 класс «Б» школы № 2
Ф.И.О. учителя математики	Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра Городской больницы № 1
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Всего

В тетрадь надо вложить два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика, а также конверт с написанным на нем вашим адресом.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, что и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1989 года (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если Вы успешно выполните это задание, то начиная с сентября 1989 года будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: «119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием» или по адресу соответствующего филиала. Если вы живете в зоне действия одного из наших филиалов, Ваша работа может быть нами туда переслана.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне — при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников, и Заочная физико-техническая школа — при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136 Ленинград, Чкаловский пр., 25*, С—З ЗМШ, на прием.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить во ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1989 года на два потока: для тех, кто с сентября 1989 года начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1989/90 учебном году. Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативное занятие. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1989/90 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1989/90 учебном году и итоговых оценок за вступительные задания по физике и математике). Все материалы по организации кружков и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ с указанием «Кружок») *до 25 мая 1989 года.* (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются). Работа руководителей заочных физико-математических кружков может оплачиваться школами по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо аккуратно переписать (на русском языке) в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко, печатными буквами, в именительном падеже). Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

1. Область (край или АССР)	Ульяновская область
2. Фамилия, имя, отчество	Андреев Николай Владимирович
3. Класс	седьмой
4. Номер и телефон школы	школа № 25, т. 3-32-17
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя по физике	Емельянова Ольга Александровна
по математике	Кузьмин Борис Романович
6. Профессия родителей и занимаемая должность отец	мастер в телеателье
мать	повар
7. Подробный домашний адрес	433510 г. Димитровград Ульяновской обл., ул. Ленина, д. 3, кв. 14.

№ п/п														
Ф.														
М.														

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт, на котором напишите свой домашний адрес.

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1989 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1989 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, Ленинградский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской,

Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Украины высылают работы по адресу: 252680 г. Киев-142, пр. Вернадского, д. 36, институт Металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—9 — для восьмых классов, 7—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—6 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание
Физика

1. Два корабля движутся навстречу друг другу. Скорость одного корабля v_1, другого v_2. Когда расстояние между кораблями становится равным s, с одного из кораблей взлетает голубь и летит к другому кораблю. Достигнув его, он резко поворачивает и летит обратно, и т. д. Голубь летает между кораблями практически с постоянной скоростью v. Какой путь он пролетит до момента встречи кораблей?

2. Из одного города в другой вышел пешеход. Когда он прошел 27 км, вслед ему выехал автомобиль, имеющий скорость в 10 раз бо́льшую, чем пешеход. Второго города они достигли одновременно. Каково расстояние между городами?

3. В цилиндрический сосуд с площадью дна 200 см^2 и высотой 30 см налили 4 литра воды. В сосуд опускают стержень сечением 100 см^2, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

4. В сосуде с водой плавает кусок льда объемом V, внутри которого находится кусок свинца объемом v. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает? Плотность воды 1 г/см^3, льда — 0,9 г/см^3, свинца — 11,3 г/см^3.

5. В термосе находятся равные массы воды и льда при температуре 0 °С. В термос вливают воду, масса которой равна суммарной массе воды и льда, первоначально находившихся в термосе, а температура равна 49,9 °С. Какая температура установится в термосе? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

6. При изготовлении льда в холодильнике потребовалось 5 минут, чтобы охладить воду от 4 °С до 0 °С, и еще 1 час 40 минут, чтобы превратить ее в лед. Определите из этих данных удельную теплоту плавления льда. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°С).

7. Два мяча брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми скоростями: один вертикально вверх с поверхности земли, другой вертикально вниз с высоты H. Найдите эти скорости, если известно, что к моменту встречи один из мячей пролетел путь $H/3$.

8. Радиус Солнца в 108 раз больше радиуса Земли, а плотность Солнца равна 0,25 плотности Земли. Найдите ускорение силы тяжести у поверхности Солнца.

9. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной обмотки чайник закипает через 10 минут, при включении другой — через 15 минут. Через сколько времени чайник закипит, если обе обмотки включить: а) параллельно? б) последовательно?

10. Тело скользит с наклонной плоскости с углом наклона 30°, а затем — по горизонтальной плоскости. Пройдя по горизонтальной плоскости расстояние, равное длине наклонной плоскости, тело остановилось. Найдите коэффициент трения.

11. Покоящийся атом распадается на две части, массы которых m_1 и m_2, а суммарная кинетическая энергия E. Определите их скорости.

12. Некоторое количество газа нагревается от температуры 300 К до температуры 400 К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре. Начальный объем газа 3 л. Давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным 1 атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

13. Груз, подвешенный на нити длиной l, равномерно вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Найдите период обращения груза, если при его вращении нить отклоняется от вертикали на угол α.

14. Сосуд объемом 20 л разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левой части находится 1 моль воды, в правой — 0,5 моля азота. Температура поддерживается равной 100 °С. Определите объем правой части.

Математика

1. Два туриста одновременно вышли из пункта A в пункт B. Первый турист половину времени шел со скоростью 5 км/ч, а другую половину — со скоростью 4 км/ч. Второй турист 4/9 пути шел со скоростью 6 км/ч, а остальную часть — со скоростью 4 км/ч. Какой турист раньше прибыл в пункт B?

2. Длина средней линии трапеции равна 5 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3 см. Найдите основания трапеции, если углы при большем основании равны 30° и 60°.

3. Найдите наибольшее возможное значение частного от деления трехзначного числа на сумму его цифр.

4. Какие две цифры надо приписать справа к числу 1989, чтобы полученное число делилось на 8 и на 9?

5. Известно, что $a+\frac{1}{a}$ — целое число. Докажите, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ — тоже целое число.

6. На координатной плоскости рассматриваются треугольники с вершинами в точках A (0, 0), B (1, 1) и C (x, y). Найдите и изобразите на рисунке множество таких точек C, что треугольник ABC — остроугольный.

7. Точка K — середина стороны AD ромба $ABCD$, а точка L лежит на диагонали AC, $AL=3LC$. В каком отношении точка пересечения отрезков BD и KL делит отрезок BD?

8. При каких значениях параметра a уравнение $x+\sqrt{x}=a$ имеет единственное решение?

9. Какие значения может принимать параметр c, если известно, что $|x^2-x+c|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$?

10. В выпуклом четырехугольнике площадью S проведены отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Найдите наименьшее возможное значеине произведения длин этих отрезков.

11. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбраны те, которые не делятся ни на 2, ни на 3. Найдите сумму этих чисел.

12. Из точки на окружности основания цилиндра вылетает частица, которая отражается от оснований и боковой поверхности цилиндра по закону: угол падения равен углу отражения, а в точках окружностей оснований отражения не происходит. Известно, что первое отражение произошло в точке на основании цилиндра, а после ряда отражений частица вернулась в исходную точку. Найдите наименьшее возможное число отражений.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1989/90 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСа.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ начинаются с 1 октября. Для зачисления в школу надо выполнить первое (вступительное) задание по математике, которое предлагается всем поступающим в ВЗМШ (само Задание 1 и правила оформления решения приведены в информации «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала). К решению приложите заявление (в заявлении укажите фамилию, имя, отчество, полный домашний адрес, профессии и занимаемые должности родителей) и вышлите это не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения — три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз. ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1989 году

1. В бак, имеющий форму куба, входит 15 м^3 воды. Столько же воды входит в бак высотой 2,5 м с квадратным основанием. Сравните стороны оснований первого и второго бака.

2. Найдите $x_1^3+x_2^3$, не вычисляя x_1 и x_2, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

3. Илья Муромец, Алеша Попович, Добрыня Никитич и Микула Селянинович поразили стрелами несколько Змеев Горынычей. В каждого из змеев попало ровно 3 стрелы, причем это были стрелы разных богатырей. Больше всего попаданий — 6 — было у Ильи Муромца, а меньше всего — 3 — у Алеши Поповича. Сколько было подстреляно Змеев?

4. Двое играют в следующую игру. На плоскости отмечено 1988 точек,

являющихся вершинами правильного 1988-угольника. Играющие по очереди соединяют две вершины многоугольника отрезком, соблюдая такие правила: нельзя соединять точки, хотя бы одна из которых уже соединена с другой, и нельзя пересекать уже проведенные отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода согласно этим правилам. Как нужно играть, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре?

5. Докажите, что при любом натуральном k число k^3+5k делится на 3.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CL. Найдите площадь треугольника BKL, если площадь треугольника ABC равна S, а $\cos\angle B=k$.

7. Является ли полным квадратом число

$$N=\underbrace{11...1}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{22...2}_{n\text{ цифр}}?$$

8. В треугольнике известны длины двух сторон: a и b. Какой должна быть длина третьей стороны, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

9. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB=113°$, $\angle BOC=123°$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

10. На ячейку сот, имеющую форму правильного 6-угольника со стороной 1, сели 7 мушек. Всегда ли найдутся 2 мушки, расстояние между которыми не превосходит 1?

XIX Международная физическая олимпиада

(Начало см. на с. 59)

Так, советские школьники были полностью подготовлены к выполнению экспериментальной задачи «Исследование магнитного поля методом баллистического гальванометра» на XVI Международной олимпиаде, оптической задачи на предыдущей олимпиаде и теоретической задачи «Маятник Максвелла» на последней олимпиаде.

Сами участники олимпиады (советские школьники) единодушно отметили, что выступили ниже своих возможностей. Одна из причин — утомление от летнего сбора. Может быть, целесообразно устраивать недельный отдых после сбора перед началом олимпиады. По мнению олимпийцев, проверка решений задач рабочей комиссией была выполнена в высшей степени объективно, сами задачи были не очень сложными, хотя и интересными.

Некоторая неудовлетворенность участников нашей команды недостаточно высокими результатами выступления была скрашена удивительной красотой альпийских гор и озер Верхней Австрии. Неизгладимые впечатления оставили посещения «города Моцарта» Зальцбурга и прекрасной столицы Австрии Вены. Члены советской команды не забудут той заботы и радушия, какими они были окружены гостеприимными хозяевами и особенно постоянно сопровождавшей их переводчицы Ольги Гарант.

На заключительном заседании Международной комиссии руководитель команды ПНР А. Котлицкий от имени своего правительства пригласил участников и гостей олимпиады на юбилейную XX олимпиаду в Польшу. Интересно, что именно там состоялась в 1967 году первая Международная физическая олимпиада школьников.

Пожелаем успехов будущим советским олимпийцам!

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \cos x \cos 2x} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O, $AO=2$, $OC=3$. Точка K лежит на стороне BC, причем $BK:KC=1:2$. Треугольник AKD равносторонний. Найдите его площадь.

4. Множество M состоит из точек $(a; b)$ координатной плоскости, для которых $|a| \neq 1$ и уравнение

$$(3a-4b+15)x^4+(7a-24b+35)x^2+ \\ +|a^2-1|+a^2-1=0$$

имеет ровно три решения. Докажите, что в многоугольник, внутренней областью которого является множество M, можно вписать окружность, и найдите координаты центра этой окружности.

5. На продолжении за точку A_1 ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) взята точка M. Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α, пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что угол KK_1M равен $\operatorname{arctg}\sqrt{55}$. Известно, что сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2=\frac{7}{2}$, $KK_1=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3=\frac{3}{8}\sqrt{14}$. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

2. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DK. Диагональ AC пересекает высоту DK в точке M так, что $DM:MK=13:7$. Найдите DK, если известно, что $AK=17$.

3. Пристань А находится выше по течению реки, чем пристань Б. Из А и Б одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Достигнув пристани А, моторная лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $\frac{2}{3}$ расстояния между А и Б. Найдите время, которое затрачивает плот на путь из А в Б, если известно, что моторная лодка проплывает из Б в А и обратно за 3 часа.

4. Найдите все такие значения p, чтобы к графику функции $y=x^4-\sqrt{3}x^2+\frac{21p^2}{2^p+3}$ можно было провести касательную, пересекающую ось ординат в точке $(0; a)$, где $a \geqslant \frac{3}{4}2^p p^2 + \frac{1}{4}$.

5. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB. Точка A лежит на стороне LM и $AM<AL$, точка N равноудалена от точек B и C. Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найдите длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Космонавты, высадившиеся на поверхность Марса, измерили период вращения кони-

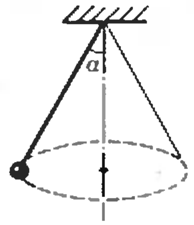


Рис. 1.

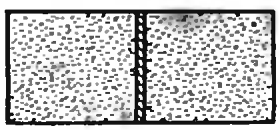


Рис. 2.

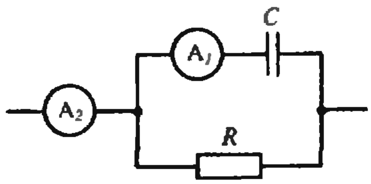


Рис. 3.

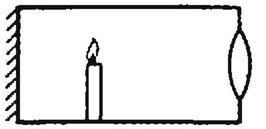


Рис. 4.

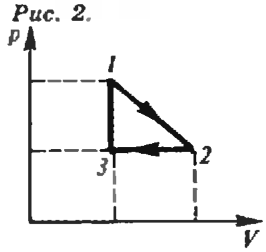


Рис. 5.

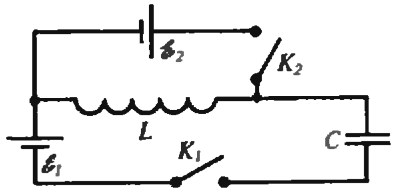


Рис. 6.

ческого маятника (небольшое тело, прикрепленное к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью — рис. 1), и он оказался равным $T=3$ с. Длина нити $l=1$ м. Угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha=30°$. Найдите по этим данным ускорение свободного падения на Марсе.

2. В цилиндрическом сосуде, разделенном свободно перемещающимся поршнем на две части, в каждой части находится по одному молю идеального одноатомного газа (рис. 2). Температура газа в левой части сосуда поддерживается постоянной. Найдите теплоемкость газа в правой части сосуда при таком положении поршня, когда он делит сосуд пополам. Поршень тепла не проводит.

3. Через параллельно соединенные резистор с сопротивлением $R=200$ Ом и конденсатор с емкостью $C=5$ мкФ течет переменный ток с циклической частотой $\omega=10^3$ с$^{-1}$. Амперметр A_1 (рис. 3) показывает ток $I_1=1$ А. Найдите показание амперметра A_2. Оба амперметра предназначены для измерения переменного тока. Сопротивление амперметра A_1 достаточно мало.

4. В светонепроницаемой коробке стоит зажженная свеча. Задняя стенка коробки — плоское зеркало. В переднюю вставлена линза (рис. 4). Длина коробки L. В этой системе наблюдают два изображения пламени свечи, причем размеры изображений одинаковы. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Троллейбус массой $m=12\cdot10^3$ кг на некотором горизонтальном прямолинейном участке увеличил скорость с $v_1=5$ м/с до $v_2=10$ м/с. Двигатель троллейбуса развивал постоянную мощность $N=60$ кВт. Пренебрегая сопротивлением движению, найдите максимальное и минимальное значения ускорения троллейбуса на этом участке.

2. Идеальный газ расширяется до удвоенного объема в процессе *1—2* с линейной зависимостью давления от объема (рис. 5). Затем его изобарически сжимают в процессе *2—3* до первоначального объема. Найдите отношение работ, совершенных газом в процессах расширения и сжатия. Известно, что температуры в состояниях *1* и *2* одинаковы.

3. В схеме, приведенной на рисунке 6, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор C не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1. В момент, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, замыкают ключ K_2. Определите, через какое время после замыкания ключа K_2 сила тока через катушку индуктивностью L увеличится в 3 раза. Заданными считать L, C и отношение $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1=0{,}8$. Всеми омическими потерями пренебречь.

4. Две тонкие линзы находятся на расстоянии 25 см друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз создает прямое действительное изображение предмета в натуральную величину. Если линзы поменять местами, не изменяя положения предмета, то снова получается прямое действительное изображение предмета с увеличением 4. На сколько отличаются оптические силы линз?

Публикацию подготовили
К. А. Букин, В. Н. Дерябкин

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Расстояние между пристанями A и B по реке 60 км, по шоссе — 40 км. Пассажир опоздал к отплытию теплохода из A на 1,5 часа. Он мгновенно садится в такси и достигает B одновременно с теплоходом. Выяснилось, что скорость такси была на 55 км/ч больше скорости теплохода. Какова скорость теплохода?

2. Решите уравнение
$$\sin x-\cos x=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}.$$

3. Решите неравенство
$$4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leqslant 0.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y=\left|x^2-x+\frac{4}{25}\right|-x^3.$$
на промежутке $[-1;\ 1]$.

5. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC и ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$$y=x^2(x-3)$$
на промежутке $[1;\ 4]$.

2. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 1 см. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите стороны треугольника.

3. Решите уравнение
$$3+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{32}{x+3}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x).$$

4. Решите неравенство
$$\frac{x}{x^2-3x-4}>0.$$

5. Найдите все значения x, принадлежащие промежутку $[-\pi;\ \pi]$ и удовлетворяющие соотношению

$$|\sin 2x| = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля, летящая с некоторой скоростью, углубляется в дощатый барьер на глубину $l=10$ см. На сколько углубится в тот же барьер пуля, имеющая вдвое большую скорость?

2. Автобус массой $m=4$ т трогается с места и на пути $l=100$ м приобретает скорость $v=20$ м/с. Найдите коэффициент трения, если сила тяги $F=10$ кН.

3. Мяч, летящий со скоростью $v_1=20$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2=15$ м/с. Найдите, чему равно изменение импульса мяча, если изменение его кинетической энергии при этом равно $\Delta E=8{,}75$ Дж.

4. Автомобиль массой $m=2000$ кг тормозит и останавливается через $t=4$ с, пройдя путь $l=40$ м. Какую работу совершает при этом сила трения?

5. В баллоне объемом $V=0{,}2$ м^3 находится гелий под давлением $p_1=10^5$ Па при температуре $t_1=17$ °С. После подкачивания гелия давление повысилось до $p_2=3\cdot10^5$ Па, а температура стала равной $t_2=47$ °С. На сколько увеличилась масса гелия? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса гелия $\mu=4\cdot10^{-3}$ кг/моль.

6. Для нагревания некоторого количества воды от 0 °С до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого $\tau_2=1$ ч 20 мин потребовалось для обращения всей воды в пар при тех же условиях. Определите по этим данным удельную теплоту парообразования воды. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых металлических шарика с зарядами $q_1=9{,}5\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=54{,}5\times10^{-9}$ Кл находились в воздухе на некотором расстоянии друг от друга. Затем их на некоторое время соединили и поместили в керосин на прежнее место. Сила взаимодействия шариков при этом не изменилась. Найдите диэлектрическую проницаемость керосина.

8. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r=0{,}4$ Ом подключен резистор сопротивлением $R=6$ Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней цепи, если последовательно первому подключить еще один такой же резистор?

9. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U=380$ В и потребляет силу тока $I=20$ А. Каков КПД двигателя, если груз массой $m=1$ т кран поднимает равномерно на высоту $h=19$ м за время $t=50$ с?

10. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с вакуумом падает луч света. Угол падения $\alpha=30°$. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления этой жидкости.

Публикацию подготовили
В. С. Копылов, О. Ю. Овчинников, С. В. Пчелинцев

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$$

3. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Определите объем призмы.

4. Вычислите сумму корней уравнения

$$x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$$

и найдите значения a, при которых она принимает наибольшее значение.

5. Решите уравнение

$$\left(x-\lg\frac{x}{2}\right)^{\lg^2 2x-\lg\frac{x}{5}-1}=1.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{x+2}{3x-a} + \frac{3-x}{3x^2+2ax-a^2} = \frac{3x+2}{x+a}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2 x+4\sin(x+1)} = \sqrt{4\sin x\cos 1-\sin 2x}.$$

3. Приведите определение функции $y=\sin x$, изложите с обоснованием ее свойства и построение ее графика.

4. При каких значениях a наименьшее значение функции $y=x^2+(a-2)x-a$ на отрезке $[1;\ 3]$ равно -4?

5. а) Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3, один из углов прямой. Определите площадь треугольника.

б) Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника?

Публикацию подготовил *В. А. Тонян*

Ответы, указания, решения

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $0<x<1$.

2. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $(k\in Z)$.

3. $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Указание. Пусть $AK=a$, $\angle KAO=\varphi$, точка K' — ортогональная проекция точки K на прямую AC (рис. 1). Из условия задачи следует, что $OK'=1$. Тогда

$$\begin{cases} a\cos\varphi=3, \\ a\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=2, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ и $a=2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

4. $\left(0;\ \frac{5}{2}\right)$. Указание. Множество M задается системой неравенств

$$\begin{cases} |a|<1, \\ (3a-4b+15)(7a-24b+35)<0. \end{cases}$$

Это множество — трапеция с вершинами в точках $A\left(1;\ \frac{9}{2}\right)$, $B\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$, $C\left(-1;\ \frac{7}{6}\right)$, $D(-1;\ 3)$, причем $AB+CD=AD+BC$. Пусть ордината центра окружности равна b. Так как радиус окружности равен 1 и прямая AD пересекает ось ординат в точке $\left(0;\ \frac{15}{4}\right)$, то b находим из уравнения $\left(\frac{15}{4}-b\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=1$.

5. $\frac{63}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Решение. В пятиугольнике $KK_1K_2K_3K_4$ (рис. 2) $K_1K_2\cos\angle KK_1M=\frac{7}{2}\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{55})=\frac{7}{4\sqrt{14}}$. Заметим, что $KK_1=K_2K_3=\frac{7}{4\sqrt{14}}$, следовательно, $(KK_3)\perp(KK_1)$. Пусть $AB=a$, $\angle CKK_1=\varphi$, точки K_2' и K_3' — ортогональные проекции на плоскость ABC точек K_2 и K_3 (рис. 3). Применив теорему синусов к треугольникам KCK_1, $AK_2'K_3'$, KBK_3' (учитывая, что $\angle K_1KK_3'$ прямой), получим:

$$\frac{\sqrt{14}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{3}, \qquad (1)$$

$$\frac{3}{8}\sqrt{14}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=AK_3'\sin\frac{\pi}{3}, \qquad (2)$$

$$\frac{a}{2}\cos\varphi=(a-AK_3')\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right). \qquad (3)$$

Из (1) и (2) получаем, что $AK_3'=\frac{3}{8}a$, с учетом этого из (3) следует, что $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. Далее находим $a=3\sqrt{2}$, $K_1K_2'=\frac{7}{2\sqrt{2}}$. Высота призмы равна $\frac{7}{2\sqrt{2}}$.

Вариант 2

1. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

2. $2\sqrt{30}$. Указание. Пусть $AB=a$. Используя свойство биссектрисы, получаем $KC=\frac{7}{13}a$. Тогда $KD=\frac{2\sqrt{30}}{13}a$, $AK=\frac{17}{13}a$.

3. 4 часа.

4. $p\leqslant 2$. Указание. Касательная, проведенная к графику функции в точке $(x_0;\ y_0)$, $x_0\geqslant 0$, пересекает ось ординат в точке $(0;\ a)$, где $a=-3x_0^4+\sqrt{3}x_0^2+\frac{21p^2}{2^p+3}$. Функция $a(x_0)$ принимает наибольшее значение в точке $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}}$, оно равно $\frac{1}{4}+\frac{21p^2}{2^p+3}$.

5. $AB=10\sqrt{13}$, $MN=30$, расстояние от точки N до плоскости $ABCD$ равно $10\sqrt{\frac{14}{13}}$. Решение. Пусть $AB=a$, $AM=BK=b$, $\angle ABN=\varphi$, плоскости $ABCD$ и $KLMN$ пересекаются под углом ψ (рис. 4). Находим $BN=\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)$. Тогда из условия равноудаленности точки N от точек B и C получим

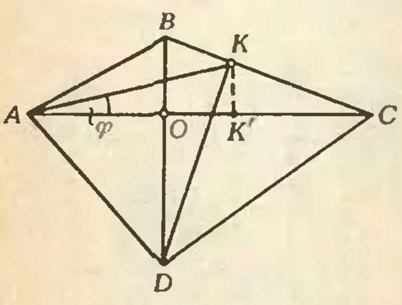


Рис. 1.

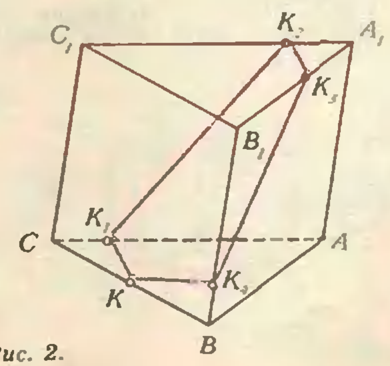


Рис. 2.

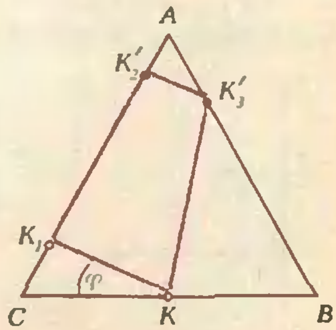


Рис. 3.

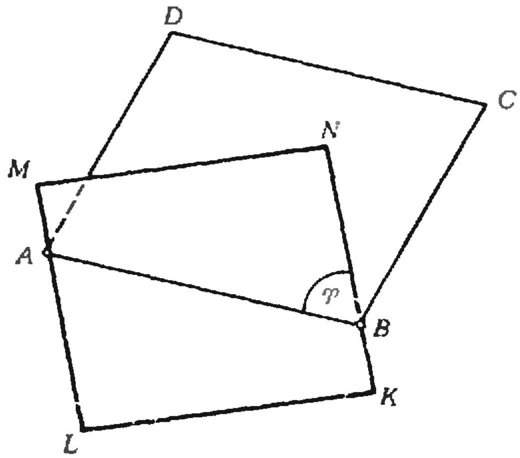


Рис. 4.

$$\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\psi\cos\psi=\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

По теореме Пифагора находим расстояние от точки M до прямой AD. Оно равно $b\sqrt{\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi}$. По условию задачи $b=5$, поэтому

$$\sin^2\varphi\sin^2\psi+\cos^2\varphi=\frac{12}{25}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) определяем $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}$, $\psi=\arccos\frac{13}{15}$ и $a=\frac{2b}{\sin\varphi-\cos\varphi}=10\sqrt{13}$, $MN=a\sin\psi=30$. Расстояние от точки N до плоскости $ABCD$ равно $BN\sin\varphi\sin\psi$.

Физика

Вариант 1

1. На тело действуют две силы — сила тяжести $mg_{М}$, где $g_{М}$ — искомое ускорение свободного падения на Марсе, и сила натяжения нити F (рис. 5). Причем вертикальная составляющая силы натяжения $F_y=F\cos\alpha$ компенсирует силу тяжести:

$$F\cos\alpha=mg_{М},$$

а горизонтальная $F_x=F\sin\alpha$ создает центростремительное ускорение, вызывающее движение тела по окружности радиусом $R=l\sin\alpha$:

$$F\sin\alpha=\omega^2R=\omega^2l\sin\alpha=(2\pi/T)^2l\sin\alpha.$$

Решая совместно полученные уравнения, найдем

$$g_{М}=\frac{F}{m}\cos\alpha=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2l\cos\alpha\approx3{,}8\ \text{м/с}^2.$$

2. Состояние 1 моля идеального газа в правой части сосуда в начальный момент описывается уравнением Менделеева—Клапейрона:

$$p_1V_1=RT_1.$$

Здесь и в дальнейшем индекс «1» будет относиться к параметрам газа в правой части сосуда, а «2» — в левой. Когда мы подведем к правой части сосуда небольшое количество теплоты ΔQ, параметры газа изменятся, но по-прежнему будут удовлетворять уравнению состояния:

$$(p_1+\Delta p_1)(V_1+\Delta V_1)=R(T_1+\Delta T_1).$$

Вычитая почленно одно равенство из другого, получим:

$$p_1\Delta V_1+V_1\Delta p_1+\Delta p_1\Delta V_1=R\Delta T_1.$$

Как обычно, предполагая, что в проводимом нами процессе все параметры газа изменяются на малую величину ($\Delta T_1\ll T_1$, $\Delta p_1\ll p_1$, $\Delta V_1\ll V_1$), мы можем пренебречь малым членом $\Delta p_1\Delta V_1$ по сравнению с другими и записать:

$$p_1\Delta V_1+V_1\Delta p_1=R\Delta T_1. \qquad (1)$$

Аналогичное выражение мы можем получить и для 1 моля газа в левой части сосуда:

$$p_2\Delta V_2+V_2\Delta p_2=0. \qquad (2)$$

По определению теплоемкость

$$C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Используя первое начало термодинамики, для газа в правой части сосуда можно записать:

$$\Delta Q=C\Delta T_1=\Delta U_1+p_1\Delta V_1,$$

или

$$C\Delta T_1=\frac{3}{2}R\Delta T_1+p_1\Delta V_1.$$

Поскольку давления в обеих частях сосуда все время остаются равными: $p_1=p_2=p$ и $\Delta p_1=\Delta p_2=\Delta p$, а изменения объемов связаны очевидным соотношением $\Delta V_1=-\Delta V_2$, из равенств (1) и (2) легко получить, что

$$p_1\Delta V_1=\frac{R\Delta T_1}{1+V_1/V_2},$$

и, следовательно,

$$C=\frac{3}{2}R+\frac{R}{1+V_1/V_2}.$$

В момент, когда поршень делит сосуд пополам, $V_1=V_2$, откуда

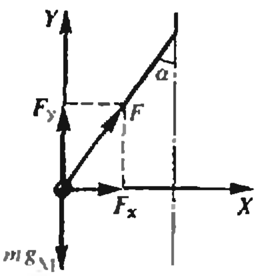


Рис. 5.

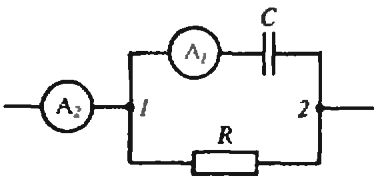


Рис. 6.

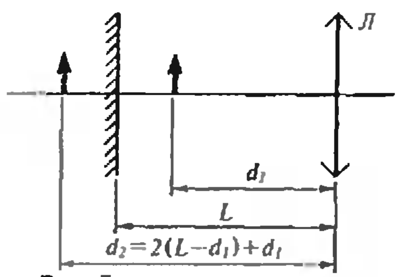


Рис. 7.

$$C=\frac{3}{2}R+\frac{R}{2}=2R.$$

3. Если к участку «1—2» (рис. 6) приложено переменное напряжение $u=U_m\cos\omega t$, то через резистор R течет ток

$$i_R=I_{mR}\cos\omega t=\frac{U_m}{R}\cos\omega t.$$

Амплитуда тока, текущего через конденсатор C, равна

$$I_{mC}=\frac{U_m}{X_C}=U_m\omega C,$$

при этом ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на $\pi/2$:

$$i_C=I_{mC}\cos(\omega t+\pi/2)=$$
$$=U_m\omega C\cos(\omega t+\pi/2)=I_{mR}R\omega C\cos(\omega t+\pi/2).$$

В нашем случае

$$R\omega C=1,$$

следовательно,

$$I_{mR}=I_{mC},\ \text{и}\ i_R=I_{mC}\cos\omega t.$$

Полный ток, текущий по цепи, найдем сложением составляющих токов:

$$i=I_{mC}\cos\omega t+I_{mC}\cos(\omega t+\pi/2)=$$
$$=\sqrt{2}I_{mC}\cos(\omega t+\pi/4).$$

Таким образом, суммарный ток по амплитуде в $\sqrt{2}$ раз больше тока, текущего через конденсатор. Такая же связь будет и между эффективными значениями токов, измеряемыми амперметрами:

$$I_2=\sqrt{2}I_1\approx1{,}41\ \text{A}.$$

4. Не останавливаясь подробно на анализе задачи, отметим, что приведенным условиям отвечает единственно возможный вариант: линза положительная, от свечи в качестве предмета она дает мнимое изображение, а от отражения свечи в зеркале — действительное изображение. Тогда, используя формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

для первого изображения можем записать (рис. 7):

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}.$$

Отсюда

$$f_1=\frac{Fd_1}{F-d_1}$$

и увеличение

$$\Gamma_1=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{F-d_1}.$$

Аналогично для второго изображения:

$$\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F},\ f_2=\frac{Fd_2}{d_2-F},\ \Gamma_2=\frac{F}{2L-d_1-F}.$$

По условию задачи $\Gamma_1=\Gamma_2$, следовательно,

$$F-d_1=2L-d_1-F\ \text{и}\ F=L.$$

П р и м е ч а н и е. В решении не рассматривается тривиальный случай $F\to\infty$, когда в качестве линзы используется плоскопараллельная пластинка.

Вариант 2

1. Используя известное соотношение $N=Fv$, связывающее мощность и скорость, и второй закон Ньютона $F=ma$, легко находим:

$$a_{max}=\frac{N}{v_1m}=1\ \text{м/с}^2,\ a_{min}=\frac{N}{v_2m}=0{,}5\ \text{м/с}^2.$$

2. Пусть $V_1=V_3=V$, $V_2=2V$, $p_2=p_3=p$. Тогда из условия $T_1=T_2$ получаем, что $p_1=2p$. Считая работу на участке $1-2$ как площадь заштрихованной на рисунке 8 трапеции:

$$A_{12}=\frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1)=$$
$$=\frac{1}{2}(p+2p)V=\frac{3}{2}pV$$

и имея очевидное

$$A_{23}=-pV,$$

получаем

$$A_{12}/A_{23}=-3/2.$$

3. Есть два момента времени, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, отличающиеся разными направлениями тока в катушке (рис. 9). После замыкания ключа K_1 работа, совершенная источником тока $\mathscr{E}_1$ по перемещению заряда q, равна сумме энергий, запасенных в конденсаторе C и катушке индуктивности L:

$$q\mathscr{E}_1=\frac{CU^2}{2}+\frac{LI_0^2}{2},$$

где $U=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ и $q=C(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)$. Отсюда

$$I_0=\pm\sqrt{\mathscr{E}_1^2-\mathscr{E}_2^2}\sqrt{\frac{C}{L}}=\pm0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После замыкания ключа K_2 для верхнего контура можем записать закон Ома:

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=\mathscr{E}_2,\ \text{или}\ \Delta I=-\frac{\mathscr{E}_2}{L}\Delta t.$$

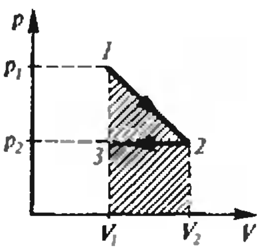


Рис. 8.

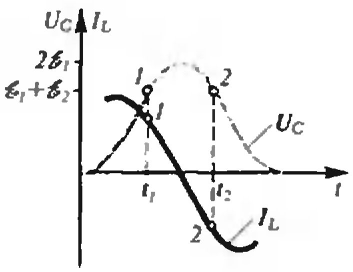


Рис. 9.

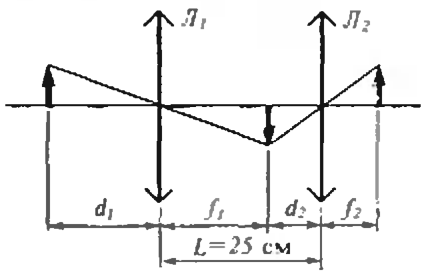


Рис. 10.

Интегрируя с учетом начальных условий, получаем

$$I = I_0 - \frac{\mathscr{E}_2}{L}t = \pm 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} - 0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t,$$

откуда находим два решения:

1) $-1{,}8\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} = \ 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} - 0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 3\sqrt{LC};$

2) $-1{,}8\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} = -0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}} - 0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2 = 3/2\sqrt{LC}.$

4. Условию задачи отвечает система из двух собирающих линз, каждая из которых дает действительное изображение (рис. 10). Используя формулу тонкой линзы для линзы $Л_1$, находим $f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1}$

и увеличение

$$\Gamma_{11} = \frac{f_1}{d_1} = \frac{F_1}{d_1 - F_1}.$$

Для линзы $Л_2$ получаем

$$d_2 = L - f_1,\ f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2}$$

и увеличение

$$\Gamma_{12} = \frac{F_2}{d_2 - F_2} = \frac{F_2}{L - \frac{d_1F_1}{d_1 - F_1} - F_2}.$$

Полное увеличение системы из двух линз равно

$$\Gamma_1 = \Gamma_{11}\cdot\Gamma_{12} = \frac{F_1}{d_1 - F_1} \times \frac{F_2}{L - \frac{d_1F_1}{d_1 - F_1} - F_2}.$$

В нашем случае удобно переписать это выражение в виде:

$$\frac{1}{\Gamma_1} = \frac{1}{\Gamma_{11}}\cdot\frac{1}{\Gamma_{12}} = \frac{d_1(L-(F_1+F_2))+F_1F_2}{F_1F_2} - \frac{L}{F_2}.$$

После перестановки линз увеличение системы задается аналогичным выражением:

$$\frac{1}{\Gamma_2} = \frac{1}{\Gamma_{21}}\cdot\frac{1}{\Gamma_{22}} = \frac{d_1(L-(F_2+F_1))+F_2F_1}{F_2F_1} - \frac{L}{F_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2} = L\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}\right).$$

Так как оптическая сила линзы $D = 1/F$, то

$$D_2 - D_1 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}\right) = 3 \text{ дптр}.$$

[redacted]ковский государственный педагогический [redacted]титут им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 25 км/ч.
2. $x_1 = \frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2 = \pi(2l+1)$, $x_3 = \frac{\pi}{4}(8m+3)$, $k, l, m \in Z$.
3. $]-\infty; 0) \cup [{}^1/_2; +\infty]$.
4. $y_{max} = 79/25$.
5. $a^2(\sqrt{6}+\sqrt{15})/3$.

Вариант 2

1. $y_{max} = 16$; $y_{min} = -4$.
2. $5/2$, 6, $13/2$.
3. $[-2; 1]$.
4. $(-1; 0) \cup (4; +\infty)$.
5. $\pm\pi/6$; $\pm\pi/2$.

Физика

1. $l' = 4l = 40$ см.
2. $\mu = \frac{F}{mg} - \frac{v^2}{2lg} = 0{,}05$.
3. $\Delta P = 2\Delta E/(v_1 - v_2) = 3{,}5$ кг·м/с.
4. $A = 2ml^2/t^2 = 4\cdot10^5$ Дж.
5. $\Delta m = \frac{MV}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) = 0{,}06$ кг.
6. $r = c(t_к - t_0)\tau_2/\tau_1 \approx 2{,}2\cdot10^6$ Дж/кг (здесь $t_к = 100$ °C — температура кипения, $t_0 = 0$ °C — начальная температура воды).
7. $\varepsilon = (q_1+q_2)^2/(4q_1q_2) \approx 2$.
8. Мощность уменьшится в $n = (r+2R)^2/(2(r+R)^2) \approx 1{,}9$ раз.
9. $\eta = mgh/(UIt) \approx 50$ %.
10. $n = \mathrm{ctg}\,\alpha = 1{,}73$.

[redacted]ковский институт электронного машино-[redacted]ения

Математика

Вариант 1

1. $x = (a+1)^2/4$ при $|a| < 1$. При других a корней нет.
2. $2\pi k$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in Z)$.
3. $V = a^3\sqrt{2\cos\alpha}/\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.
4. $a = 2$. Указание. Сумма корней равна $2(3a - a^2)$ при условии $D \geqslant 0$.
5. $[0{,}5; 5]$. Указание. $x - \lg\frac{x}{2} > 1$ при всех $x > 0$, так как функция $f(x) = x - \lg\frac{x}{2}$ имеет минимум в точке $x_0 = \lg e$, причем $f(x_0) = \lg\frac{2e}{\lg e} > 1$.

Вариант 2

1. $\{-1; -(4a+3)/8\}$ при $a \neq -3, -9/4, -1/4, 1$; $\{-9/8\}$ при $a = -3$; $\{-1\}$ при $a = -9/4$ и $a = -1/4$; $\{7/8\}$ при $a = 1$.
2. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in Z)$. Указание. Возводя в квадрат, получим после упрощений два уравнения: $\cos x = 0$ и $\cos x + \sin x = -2\sin 1$; второе из них не имеет корней, поскольку

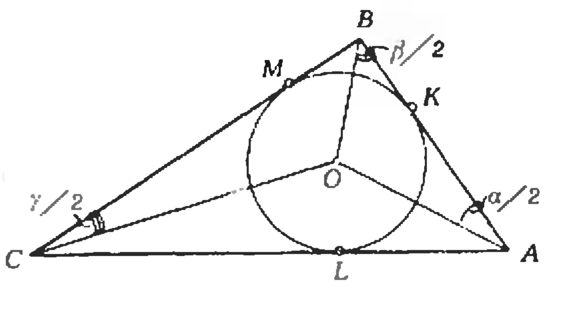


Рис. 11.

$|2\sin 1|>2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\geqslant|\sin x+\cos x|$. Необходимо учесть еще область определения.

4. $a=-2\sqrt{3}$. Указание. Пусть $f(x)=x^2+(a-2)x-a$; поскольку $f(1)=-1$, требуемое наименьшее значение достигается либо в вершине параболы, если она принадлежит отрезку [1; 3], либо при $x=3$. Последний случай невозможен.

5. а) 54; б) $S_{\min}=40{,}6$. Указание.

1) Сторона длиной 9 не может быть гипотенузой.

2) Пусть ABC — даный треугольник, $AB=9$, $AK=x$ (рис. 11). Тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{x}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{3}{9-x}$; $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{27}{-9+9x-x^2}$. Вычисляя отрезок CM и пользуясь формулой $S=rp$, получаем $S=27-\frac{153}{x^2-9x+9}$. Минимум знаменателя достигается при $x=4{,}5$.

[redacted]ант» для младших школьников

«Квант», 1988, № 11—12)

1. 1; $281+282+...+287$; $245+246+...+252$; $8+9+...+63$. Решение. Пусть первое число равно x, а всего чисел n. Тогда $1988=nx+\frac{n(n-1)}{2}$, откуда $x=\frac{1988}{n}-\frac{n-1}{2}$. Значит, либо n есть нечетный делитель числа $1988=4\cdot 7\cdot 71$, либо n четно и частное $1988/n$ есть «целое число$+1/2$». К тому же $1988>n(n-1)/2$, откуда $n<64$. Это оставляет для n четыре возможности: 1, 7, 8, 56.

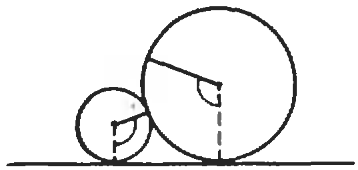


Рис. 12.

2. КАЗАК=15451; СОТНЯ=92706.

3. Это невозможно, так как в момент касания направления радиусов, бывших вертикальными в начальный момент, составляют равные углы с вертикалью (см. рис. 12).

4. Нельзя. Предположим, что на столе оказалось n кучек по три камня, тогда ранее было выкинуто $n-1$ камней, т. е. $3n+n-1=1001$, отсюда $n=250{,}5$ — нецелое число, что невозможно.

5. а) 269, 807 и 1345; б) 652, 978 и 1304.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

03—07,12,13; *И. Кравченко* (Харьков) 03; *А. Крайский* (Москва) 03—07,13; *К. Краснов* (Киев) 03—07; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 03—05,13; *Ю. Кумпан* (Москва) 05; *Д. Лабутин* (Иваново) 03,13; *С. Лапин* (Саратов) 05; *Р. Латыш* (п. Ноябрьск Тюменской обл.) 12; *В. Левченко* (Сочи) 13; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 03; *Н. Лысянский* (Новосибирск) 05—07,12—17; *И. Максутов* (Тула) 17; *Р. Малков* (Саратов) 03—05,13; *А. Малый* (Чебоксары) 03—07,17; *А. Мамаев* (Заволжье) 03—05,12; *В. Манжос* (Алма-Ата) 05; *И. Мартин* (Таллин) 03—05,13; *В. Марченко* (Минск) 07,13; *Д. Мацукевич* (Минск) 03—05,08,13; *Ю. Мечковский* (Минск) 05; *Р. Мизюк* (Ровно) 03—07,17; *А. Мина* (Киев) 07; *С. Михайлов* (Наманган) 03—05; *М. Михалаускас* (Мажейкяй) 05; *П. Михеев* (Старый Оскол) 03,05; *П. Молодов* (Ломоносов) 13; *Э. Монхбат* (Улан-Батор, МНР) 03; *М. Мороз* (Киев) 03,05; *А. Настаченко* (Ростов-на-Дону) 13; *А. Невинный* (Киев) 03—05; *Е. Недув* (Одесса) 03—07; *А. Новик* (Мозырь) 03—05,13; *Ш. Нурматов* (Наманган) 03; *Д. Ожецинский* (Киев) 05; *А. Павлощук* (Киев) 05,08; *К. Паламарчук* (Иркутск) 05; *А. Панас* (Могилев) 03,05; *И. Петков* (Враца, НРБ) 05; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 07,13; *А. Подобряев* (Волгоград) 05,13; *В. Полищук* (Канев) 05; *С. Польшин* (Харьков) 05; *С. Пономаренко* (Новосибирск) 05,17; *В. Портной* (Одесса) 07,17; *С. Постников* (Ковров) 03,05; *Е. Призант* (Одесса) 05; *А. Прошин* (Пенза) 05,17; *А. Пушнов* (Вольск) 03,13; *И. Рассадин* (Минск) 05; *Т. Рашник* (Киев) 07; *В. Розенблит* (Рига) 05; *А. Рувинский* (Ивано-Франковск) 03—05; *С. Рудницкий* (Одесса) 13; *М. Рудой* (Артемовск) 03; *А. Рыжов* (Новосибирск) 17; *Н. Рябова* (Харьков) 03; *Д. Самборский* (Истра) 03—07,13—17; *С. Сафонов* (Алдан) 05; *О. Сафронов* (п. Верещагино Пермской обл.) 03,05; *А. Серебряков* (Москва) 03,13; *М. Субботин* (Старый Оскол) 03,05; *Н. Суханов* (Ленинград) 03,13; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 03,05,13; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 03—05; *С. Тозик* (Минск) 12,13; *Д. Толкачев* (Ногинск) 03,13; *Е. Трубач* (Бобруйск) 03; *М. Турлаков* (Фрунзе) 03—07; *Д. Турсунов* (Караганда) 17; *Ю. Уваров* (Ленинград) 03,13; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 03—05,13,17; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 03—07,13; *Н. Фендеров* (Калининград) 05; *А. Фридлянд* (Саратов) 13; *И. Холиков* (п. Машад Наманганской обл.) 03; *И. Химони* (Днепропетровск) 05,07,13—17; *С. Храпов* (Коломна) 07,17; *Д. Черепнин* (Винница) 03,13; *М. Чернодуб* (Киев) 17; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 03—05,13; *А. Шаргородский* (Котовск) 03,05; *Ю. Шарлай* (Харьков) 03—05,07,13,17; *О. Шведов* (Москва) 03—05; *Е. Швец* (Черновцы) 03—07,13; *А. Шворob* (Барановичи) 03—07,12—17; *С. Шинкевич* (Березники) 03—07,17; *А. Экдышман* (Белгород) 03; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) 17; *И. Ягольницер* (Черновцы) 12,13; *Т. Яровой* (Москва) 17; *М. Яскевич* (Владимир) 03; *Е. Яхнич* (Минск) 05,12.

Вниманию подписчиков!

В наступившем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик. Для компенсации дополнительных расходов цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер. Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Поправка

В статье «Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана» («Квант», 1988, № 9) в условии десятой задачи допущена опечатка. Должно быть так:

10. Решите уравнение

$$21x^2-6\pi x\sin x-4\sqrt{3}\,\pi x\,\mathrm{tg}\,x=\pi^2\cos^2 x-\frac{\pi^2}{\cos^2 x}.$$

Крайний срок отправки решений задач первого тура олимпиады — 15 февраля с. г. (по почтовому штемпелю).

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, Т. М. Макарова, Е. К. Тенчурина, Л. А. Тишков, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил
В. В. Минахин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Н. Дронова

Сдано в набор 16.10.88. Подписано к печати 25.11.88
Т-22606. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,3. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,09
Тираж 186 281 экз. Цена 45 коп. Заказ 2671

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

НЕПОБЕДИМЫЙ «МЕФИСТО»

Очередной, седьмой чемпионат мира по шахматам среди микрокомпьютеров состоялся в Риме. Впервые компьютерная корона была определена в матч-турнире. Одну команду представляли три экземпляра знаменитого трехкратного чемпиона мира «Мефисто» (автор программы Р. Лэнг), другую — три экземпляра менее известного «Сфинкса» (автор программы Д. Леви). Состязание продолжалось 6 туров: три «Мефисто» (А, В и С) сыграли с каждым из трех «Сфинксов» (тоже А, В и С) по две партии — белыми и черными. Итог оказался печальным для «Сфинксов» — «Мефисто» выиграли все шесть партий, и в четвертый раз подряд завоевали чемпионскую корону.

Одновременно с основным состязанием в Риме проходило еще одно состязание, как бы «малый чемпионат мира». Семь программ для персональных компьютеров провели круговой турнир. Победительницей стала программа «Псион чесс», автором которой также является Р. Лэнг — создатель «Мефисто». Любопытно, что несмотря на свой высокий научно-компьютерный уровень, Ричард Лэнг не относится к разряду «рассеянных профессоров» — в промежутках между составлением программ для ЭВМ он успешно участвует в марафонских забегах.

Приведем теперь несколько образцов компьютерной игры в римских турнирах, обращая внимание на наиболее занятные эпизоды партий.

«Мефисто А» — «Сфинкс А»
Английское начало

1. c4 e5 2. Кc3 Кf6 3. Кf3 Кc6 4. e3 Сe7 5. d4 ed 6. К:d4 0—0 7. Сd3 Кe5 8. e4 Сc5 9. Сe2 Сb4 10. Сg5 h6 11. С:f6 С:c3+ 12. bc Ф:f6 13. Кb5 Фg6 14. 0—0 Ф:e4 15. К:c7 Лb8 16. Кb5 b6 17. Кd6 Фc6 18. Фd5 Кg6 19. Сf3 Фc5 20. Лad1 Сa6 21. Лfe1 Кf4 22. Ф:c5 bc 23. Лe7 Лb2 24. a4 Кg6 25. Л:d7 Кe5 26. Л:a7 С:c4 27. К:c4 К:c4 28. Лc7 Лa2 29. Сd5 Л:a4 30. Л:c5 Кb6 31. Сb3 Лa7 32. Лc6 Кd7 33. f3 Лb8 34. Сc2 Лa2 35. Сf5 Кf8 36. Лe1 Лd8 37. Лc8 Лdd2 38. Сb3 g6 39. c4 Лdb2 40. c5 Крg7 41. Лc7 Кh7 (правильно 41... Кe6! 42. С:e6 Л:g2+ с вечным шахом) **42. f4 Кf6 43. c6 Кd5.**

Активность черных фигур компенсирует отсутствие пешки, однако «Мефисто» проводит разменную комбинацию, сохраняя шансы на успех. **44. Л:f7+! Кр:f7 45. Сe6+ Крf6 46. С:d5 Лa7 47. g3 Лd2 48. Сf3 Лaa2 49. Сe4 Лa4 50. Лc1 Л:e4 51. c7 Лe8 52. c8Ф Л:c8 53. Л:c8 Лd1+ 54. Крg2 Лd2+ 55. Крh3 h5 56. Лc1 Крf5 57. Лh1 Лd3.** Проще всего ничью делало 57... g5. Теперь усилия белых увенчиваются успехом. **58. Крh4 Лd2 59. h3 Крf6 60. g4 Лf2 61. Крg3 Лc2 62. Лb1 Лc3+ 63. Крh4 Лc5 64. Лb6+ Крf7 65. f5 gf 66. g5 Крg7 67. Кр:h5 Лc7 68. h4 Лa7.** Черные сдались.

«Плимат» — «Цирус»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Кf3 Кc6 3. d4 cd 4. К:d4 Кf6 5. Кc3 d6 6. Сg5 e6 7. Фd2 a6 8. 0—0—0 Сd7 9. f4 Сe7 10. Кf3 b5 11. e5 b4 12. ef bc 13. Ф:c3 gf 14. Сh4 d5 15. Крb1 0—0 16. Кd4 К:d4 17. Ф:d4 Крh8 18. g4 a5 19. g5 Фc7 20. Лd3 Лfb8 21. Лb3.

Положение черных вызывает некоторые опасения, но они неожиданно находят способ форсировать ничью. **21... e5! 22. Ф:d5 Сc6 23. Фc4 Фd8 24. Лd3 Фb6 25. Лb3 Фd8 26. Лd3 Фb6 27. Лb3 Фd8.** Ничья.

«Псион чесс» — «Плимат»
Ферзевый гамбит

1. d4 Кf6 2. c4 e6 3. Кc3 Сb4 4. Фc2 c5 5. dc 0—0 6. Кf3 Кc6 7. Сf4 С:c5 8. e3 d5 9. Лd1 Фa5 10. a3 Лd8.

С перестановкой ходов возникла известная позиция, встречавшаяся даже в матчах на первенство мира (браво, компьютеры!). В Багио-78 (21-я партия) Карпов против Корчного избирал 10... Лe8, а в Мерано-81 (11-я партия) — 10... Сe7. И ход ладьей на d8 не раз встречался на практике. Стандартная реакция белых — 11. Кd2, а вот последовавший в партии рывок пешки b2-b4 в теории даже не рассматривается. Однако будущий победитель «малого чемпионата мира» избирает именно этот ход, и дебютная новинка приносит ему успех.

11. b4!? К:b4 12. ab С:b4 13. Лc1 Кe4 14. Сe5 f6 15. Сd4 e5. Все протекает форсированно. Черные отыгрывают фигуру, оставаясь с лишней пешкой. Удивительно, но возникающий эндшпиль в конце концов сложился в пользу белых!

16. К:e5 К:c3 17. С:c3 fe 18. cd Сf5 19. С:b4 Ф:b4+ 20. Фc3 Ф:c3+ 21. Л:c3 Сe4 22. f3 С:d5 23. e4 Сf7? Непростительная ошибка. Тактическую схватку черные провели весьма уверенно и сейчас 23... Сc6 закрепляло за ними явный перевес. **24. Лc7 b6?** Еще одна неточность (лучше было 24... Лab8), позволяющая белым прочно захватить линию «с». Окончание белые проводят безупречно.

25. Сa6! Сe6 26. 0—0 Лd7 27. Л:d7 С:d7 28. Лc1 Сe8 29. Лc7 Крf8 30. g3 h5 31. h4 g6 32. Крf2 Сf7 33. Крe3 Сb3 34. f4 ef 35. Кр:f4 Сe6 36. Крg5 Сf7 37. Крf6 Сb3 38. Кр:g6 Лe8. Черные наконец спохватываются и вводят в игру ладью, но слишком поздно. **39. Л:a7 Л:e4 40. Кр:h5 Лa4 41. Крg5 Сc4 42. Лa8+ Крe7 43. Сb7 Л:a8 44. С:a8 Сd3 45. h5 Крe6 46. h6 Крe5 47. Сc6 Сh7 48. Сe8 b5 49. С:b5 Крe6 50. Сe8 Крe7 51. Сg6 Сg8 52. h7.** Черные сдались.

В заключение один забавный пример, показывающий, что, встречаясь с компьютером, человек пока еще может рассчитывать на ошибку электронного партнера.

«Чэт» — «Кемпелен»
Неправильное начало

1. d4 f5 2. h3 Кf6 3. g4 fg 4. hg К:g4 5. Фd3 Кf6 6. Л:h7 К:h7 7. Фg6×.

Е. Я. Гик

Цена 45 коп.
Индекс 70465

Эту головоломку легко сделать из шариков для настольного тенниса. Вам понадобятся шесть шариков, не обязательно новых и целых. Два шарика разрезают на две части (рисунок справа вверху), из которых склеивают корпус. На четырех других шариках рисуют по шесть кружков четырех цветов, как на рисунке. И эти шарики вставляют в корпус (в произвольном порядке).

Головоломка состоит из двух задач:

1. Расположите шарики так, чтобы сверху и снизу получились все четыре цвета, а по бокам никакие два одинаковых цвета не стояли бы рядом.

2. Расположите шарики так, чтобы, как и в задаче 1, сверху и снизу получилось все четыре цвета, а с боков — по два одинаковых.

Поворачивая один шарик вокруг вертикальной оси, мы получим 4 варианта его внешнего вида. Так как сверху может быть любой из шести цветных кружков, число возможных положений шарика равно 24. Для четырех шариков количество расцветок равно $24^4 = 331\,776$. Найти решение головоломок очень непросто. Вы можете гордиться, если на решение потратите не более 15 минут.